Vollständiger Lehrkurs

der

reinen Mathematik

von

L. B. Francoeur,

Professor der Mathematik an der Universität zu Paris, Mitgliede der philomatischen Gesellschaft, Ritter der Ehrenlegion u. s. w.

Nach der vierten verbesserten und vermehrten Original-Ausgabe (1837) aus dem Französischen übersetzt, mit Anmerkungen und Zusätzen versehen

von

Dr. Edmund Külp,

Lehrer der Mathematik und Physik an der höhern Gewerbschule in Darmstadt.

Ersten Bandes drittes Buch,

enthaltend

die Elementar-Geometrie.

Bern, Chur und Leipzig,

Verlag und Eigenthum von J. F. J. Dalp.

1839.

Haller'sche Buchdruckerei in Bern.

Allgemeine Begriffe von der Ausdehnung.

Die Geometrie ist die Wissenschaft, welche sich zur Aufgabe macht, die Ausdehnung zu messen, und die Formen und Eigenschaften derselben näher zu betrachten. Jeder Körper hat drei Abmessungen oder Dimensionen, welche man mit den Namen Länge, Breite, Höhe (Dicke, Tiefe) bezeichnet. Die Grenzen eines Körpers, die ihn vom unendlichen Raume unterscheiden und ohne die er nicht gedacht werden kann, werden Flächen genannt. Treffen die Flächen eines Körpers je zwei zusammen, so haben solche ebenfalls ihre Grenzen, die Linien heißen. Die Linien endlich haben an dem Ort, wo sie einander begegnen, ihre Grenzen, die Punkte genannt werden. Diese verschiedenen Arten von Grenzen geben die Mittel ab, wonach wir die Figur der Körper beurtheilen.

Wiewohl es keinen Körper ohne diese drei Dimensionen geben kann, so abstrahiren wir jedoch öfters von einer oder zwei derselben. Handelt es sich z. B. von der Größe eines Grundstückes, von der Höhe eines Gebäudes, so hat man es nur mit einer Fläche oder einer Linie zu thun. Um von dem Einfachen zu dem Zusammengesetztern in einer dem Studium förderlichen Reihenfolge überzugehen, wollen wir vorerst von den Linien, dann von den Flächen und zuletzt von den Körpern reden.

Anmerkung. Man kann hiernach die Geometrie in die Longimetrie, Planimetrie und Stereometrie eintheilen. — Wir unterscheiden den geometrischen Körper von dem physikalischen. Jener ist der bloße Raum, den der andere einnimmt, abgesehen von aller darin enthaltenen Materie. Man betrachtet in der Geometrie an dem physikalischen Körper nur seine Form und

Größe. — Der geometrische Punkt, dem jede Ausdehnung fehlt, ist blos in der Idee möglich. Von größern oder kleinern Punkten kann also hier nicht die Rede sein.

Erstes Kapitel.

Von den Linien.

Von den geraden Linien, Winkeln und Dreiecken. Vom Messen der Entfernungen.

§. 1. Man kann eine Linie gewissermaßen als die Bahn ansehen, die ein Punkt bei seiner Bewegung im Raume beschreibt. Die Linie heißt eine gerade Linie oder schlechthin eine Gerade, wenn kein Punkt derselben, insofern man sie sich um zwei in ihr angenommene Punkte A und B (Fig. 1) drehen läßt, eine Verrückung erleidet. Widrigenfalls ist die Linie eine geradgebrochene, wenn sie aus verschiedenen Geraden AC, CD, DB besteht, wie ACDB (Fig. 2); oder eine krumme Linie (Curve), von welcher kein Theil geradlinig ist, wie AMB (Fig. 3).

Anmerkung. Ist eine Linie aus geraden und krummen Linien zusammengesetzt, so heißt sie eine gemischte Linie.

1) AB (Fig. 1) ist eine Gerade. Nimmt man in ihrer Richtung zwei Punkte C und D, und vereinigt diese Punkte durch eine gerade Linie CD, so fällt dieselbe in ihrer ganzen Richtung mit der Linie AB zusammen. Denkt man sich jenseits der Endpunkte C und D einer Geraden CD zwei andere beliebige Punkte A und B, dergestalt, daß die Gerade AB und die Gerade CD nur eine einzige sind, so sagt man von diesen Punkten A und B: sie liegen auf der Verlängerung der Geraden CD.

2) Jede gerade Linie CD kann über ihre beiden Endpunkte hinaus beliebig weit verlängert gedacht werden.

3) Zwei gerade Linien, welche zwei Punkte gemeinschaftlich haben, fallen ganz in einander.

4) Zwei gerade Linien können sich nur in einem Punkte schneiden; denn hätten sie zwei Punkte gemein, so würden sie zusammenfallen.

Anmerkung. Die gerade Linie ist ein einfacher Begriff; durch Erklärung eine deutlichere Vorstellung von der geraden Linie verlangen zu wollen, ist eine schwierige Sache. Wir sagen daher kurz: die gerade Linie ist uns durch Anschauung gegeben.

In der Folge soll, wenn blos Linie gesagt wird, immer eine gerade Linie gemeint sein.

Eine Fläche heißt eine ebene Fläche, oder schlechtweg Ebene, wenn die gerade Verbindungslinie von je zwei Punkten derselben ganz in die Fläche fällt. Unter einer krummen Fläche versteht man die Fläche, wenn kein Theil derselben eben ist.

Durch drei Punkte, die nicht in einer geraden Linie liegen, kann man immer eine Ebene legen. Um sich hiervon zu überzeugen, denke man sich, daß eine Ebene stets um eine durch zwei dieser Punkte gezogene Gerade gedreht werde, ohne daß die Punkte jener Geraden ihre Stelle ändern. Man sieht leicht ein, daß die Lage der Ebene fixirt ist, sobald sie durch den dritten Punkt geht; zwei Ebenen, welche diese drei Punkte gemein haben, bilden demnach eine einzige Ebene.

§. 2. Will man zwei gerade Linien oder zwei Längen BC, CA (Fig. 1) addiren, so trägt man die eine CA auf die Verlängerung der andern BC, und die verlangte Summe ist $BA = BC + CA$. Sind die Theile BC, CA gleich, so ist BA das Doppelte von CA. Man kann ebenso die Linie CA verdreifachen, u. s. w.

Um CA von BA abzuziehen, trägt man CA von A nach C, und hat so $BC = BA - CA$ als verlangte Differenz. Ueberhaupt sind die Addition und Subtraction von noch so viel Geraden, die Multiplication und Division von Längen leicht denkbare Operationen.

Anmerkung. Von dem Produkte und dem Quotienten zweier Linien kann nach arithmetischen Begriffen keine Rede sein.

§. 3. Zwei gerade Linien CB, CA (Fig. 4), welche nur einen einzigen Punkt gemein haben, können keinen Raum abgrenzen. Der unbestimmte zwischen diesen geraden Linien von beliebiger Länge eingeschlossene Raum wird Winkel genannt. Der Punkt C, wo sich beide

Linien schneiden, heißt Scheitel oder Spitze des Winkels. Die Linien CA, CB selbst heißen die Schenkel desselben. Man bezeichnet einen Winkel durch einen am Scheitel stehenden Buchstaben. Gehört der Scheitel mehrern Winkeln an (wie Fig. 10), so bezeichnet man den Winkel durch drei Buchstaben, von welchen der eine an dem Scheitel, der zweite an einer beliebigen Stelle des einen Schenkels, der dritte an irgend einer Stelle des andern Schenkels steht, jedoch so, daß beim Schreiben und Sprechen jederzeit der Buchstabe am Scheitel in die Mitte gesetzt wird. Der Winkel C (Fig. 4) wird hiernach durch BCA oder ACB ausgedrückt sein.

Anmerkung. Die Erklärung vom Winkel hat wegen der Einfachheit des Begriffs gleichfalls seine große Schwierigkeiten. Wir sagen daher auch hier kurz: der Winkel ist uns durch Anschauung gegeben.

§. 4. Zwei Winkel ACB und acb (Fig. 4) sind gleich, wenn sie auf einander gelegt sich völlig decken. Legen wir den Schenkel cb auf CB dergestalt, daß der Punkt c auf C zu liegen kommt; fällt dann der andere Schenkel ac auf AC, so ist offenbar der Winkel bca dem Winkel BCA gleich.

Da die Schenkel eines Winkels beliebig verlängert gedacht werden können, so sieht man, daß die Größe eines Winkels durchaus nicht von der Länge seiner Schenkel abhängt, sondern einzig und allein durch die Abweichung der beiden Linien von einander bestimmt wird. Dreht man den Schenkel BC (Fig. 5) um den Scheitel C, damit er in die Lage CD komme, so ist der Winkel BCA in DCA übergegangen und um den Winkel DCB gewachsen. DCA ist sonach die Summe der Winkel DCB und BCA, und BCA die Differenz der Winkel DCA und BCD; oder $DCA = BCA + BCD$, und $BCA = DCA - BCD$. Ist $BCD = BCA$, dann DCA gleich dem Doppelten von BCA. Leicht ist es einzusehen, was man unter dem Dreifachen, der Hälfte, dem Drittel u. s. w. eines Winkels zu verstehen habe.

§. 5. Wenn eine Linie BC (Fig. 6 und 7) auf eine andere AE trifft, so bildet sie mit dieser zwei Winkel BCE und BCA, welche man Nebenwinkel nennt. Sind die Nebenwinkel gleich (Fig. 7), d. h. wenn man den Winkel ECB auf BCA legt, daß die Gerade BC auf sich selbst zu liegen kommt, dann die Gerade CE mit der Geraden CA

zusammenfällt, so werden die beiden Winkel BCE und ACB rechte Winkel genannt, und man sagt: die Linie CB ist senkrecht, perpendikulär oder normal auf AE.

§. 6. Alle rechte Winkel sind einander gleich. Es sei BC auf AE und bc auf ae senkrecht (Fig. 8), d. h. W. BCA = W. BCE, und bca = bce. Wird nämlich die Figur bae dergestalt auf die Figur BAE zerlegt, daß der Punkt c auf C und die gerade ae mit AE zusammenfalle, so werden die Geraden bc und BC einander decken. Denn erhielte bc die Lage CF, so würde der Annahme zufolge BCA = BCE, FCA = FCE sein; was, da BCA < FCA, mithin BCE auch < FCE ist, nicht sein kann.

§. 7. Zwei Nebenwinkel BCE und BCA (Fig. 6) betragen zusammen zwei Rechte. Die in C auf AE errichtete Senkrechte zeigt die Richtigkeit des aufgestellten Satzes.

Beträgt umgekehrt die Summe zweier gegebenen Winkel zwei Rechte, und legt man solche Winkel, wie BCE und BCA (Fig. 9), an einander, als wollte man sie addiren, so werden die beiden äussersten Schenkel AC, CE in eine gerade Linie fallen. Bildeten AC und CE keine gerade Linie, und wäre CH z. B. die Verlängerung von CE, so hätte man BCE + BCA = 2R (Annahme), und ausserdem BCE + BCH = 2R. Folglich BCA = BCH, was ein Widerspruch ist.

Der Winkel BCE (Fig. 6), welcher kleiner als der rechte Winkel DCE ist, wird ein spitzer genannt. Der Winkel BCA, welcher größer als ein rechter ist, heißt ein stumpfer. Zwei Nebelwinkel BCE und BCA, oder solche, die sich zu zwei Rechten ergänzen, heißen Supplementwinkel; zwei Winkel, die sich zu einem Rechten ergänzen, wie BCE und DCB (Fig. 6), heißen Complementwinkel.

Läßt man von dem Punkte C (Fig. 10) in der geraden Linie AE auf einer Seite derselben die Geraden CB, CF, CD in beliebiger Anzahl ausgehen, so ist die Summe sämmtlicher Winkel BCE, BCF, FCD, DCA immer gleich zwei Rechten. Die herabgelassene Senkrechte CH zeigt die Richtigkeit der Behauptung.

§. 8. Zwei sich schneidende Linien CA, CB (Fig. 11) bilden, wenn sie über ihren Scheitel C hinaus verlängert werden, um den Punkt C her vier Winkel, von denen je zwei, wie BCE und ACD, am Scheitel entgegengesetzt sind. Solche Winkel nennt man

Vertical- oder Scheitelwinkel; sie sind einander gleich. Denn BCE + ACB = 2R; desgleichen ACD + ACB = 2R; folglich BCE = ACD.

Läßt man durch den Punkt C so viele gerade Linien AC, BC, DC... (Fig. 12), als man will, ausgehen, so ist die Summe der sämmtlichen Winkel ACB, BCD, DCE u. s. w., welche diese Linien untereinander bilden, gleich vier Rechten. Denn die durch den Punkt C gezogenen Senkrechten MN, PQ machen vier rechte Winkel, welche alle Winkelräume in sich begreifen.

§. 9. Kein Flächenraum kann durch eine geringere Anzahl gerader Linien als drei eingeschlossen werden. Dieser Raum heißt ein Dreieck oder Triangel; es hat drei Seiten AB, AC, CB, und drei Winkel A, B, C (Fig. 13). Ein Dreieck heißt gleichseitig, wenn die drei Seiten desselben einander gleich sind (Fig. 14); gleichschenklig, wenn nur zwei Seiten einander gleich sind (Fig. 15); ungleichseitig, wenn sie sämmtlich verschiedene Größe haben (Fig. 13). Hat das Dreieck einen rechten Winkel, so ist es rechtwinklig (Fig. 16); die den rechten Winkel einschließenden Seiten heißen Katheten; die dritte Seite BC heißt Hypothenuse.

Eine beliebige Seite AB des Dreiecks (Fig. 13) wird seine Grundlinie oder Basis genannt. Der Scheitel C des der Basis gegenüber liegenden Winkels heißt Spitze des Dreiecks, und das aus der Spitze auf die Basis gefällte Perpendikel CD nennt man die Höhe des Dreiecks.

§. 10. Wenn zwei Dreiecke ABC, abc (Fig. 24) zwei Seiten AB und ab, AC und ac, nebst dem von ihnen eingeschlossenen Winkel A und a einzeln genommen gleich haben, so sind die Dreiecke in allen übrigen Stücken einander gleich. Legen wir nämlich das Dreieck abc dergestalt auf das Dreieck ABC, daß die Seite ab auf ihre gleiche AB falle, und zwar a auf A und b auf B, so wird, da nach der Voraussetzung der Winkel a gleich dem Winkel A ist, die Seite ac die Richtung von AC nehmen. Der Punkt c wird endlich auf den Punkt C fallen, weil ca = CA ist; die Linien bc und BC werden sich also decken, mithin auch die Dreiecke; daher B = b, C = c und BC = bc.

Anmerkung. Geometrische Größen, die sich in allen ihren Theilen völlig decken, oder vollkommen gleich sind, oder die nach dem

Aufeinanderlegen gewissermaßen nur ein Einziges auszumachen scheinen, heißen auch Congruent. Vorstehender Lehrsatz wird daher öfters erster Satz von der Congruenz der Dreiecke genannt.

§. 11. Wenn zwei Seiten AC und BC eines Dreiecks ABC gleich sind (Fig. 15), so sind die diesen Seiten gegenüberstehenden Winkel A und B ebenfalls gleich. Man denke sich aus dem Scheitel des Winkels, welchen die gleichen Seiten einschließen, eine gerade diesen Winkel in zwei gleiche Theile theilende Linie, und solche bis zum Durchschnittspunkt mit der dritten Seite des Dreiecks verlängert, so entstehen zwei gleiche Dreiecke, aus denen sich die Gleichheit der Winkel A und B ergibt. Also:

1) Die Winkel eines gleichseitigen Dreiecks sind einander gleich.

2) Winkel ADC = CDB (Fig. 15); d. h. diese Winkel sind rechte (§. 5), und AD = DB. Die Linie folglich, welche den Winkel, den die gleichen Seiten eines gleichschenkligen Dreiecks bilden, halbirt, halbirt auch die dritte Seite des Dreiecks, und steht auf ihr senkrecht.

§. 12. Umgekehrt sind in einem Dreieck ABC (Fig. 17) zwei Winkel A und ABC einander gleich, so sind auch die diesen Winkeln gegenüberstehenden Seiten AC und BC gleich. Denn hat man AC nicht gleich BC, so nimmt man auf der größern Seite AC ein Stück AD gleich der andern BC, und zieht die Linie BD. Da die Dreiecke ABD und ABC die Seite AB gemein, die Seite AD = BC (Construction), und Winkel A = ABC (Annahme) haben, so müssen sie einander gleich sein, was offenbar ungereimt ist. Sind also in einem Dreiecke die drei Winkel einander gleich, so ist das Dreieck gleichseitig.

§. 13. Zwei Dreiecke ABC, abc (Fig. 18) sind in allen Stücken gleich, wenn die drei Seiten des einen den drei Seiten des andern einzeln genommen gleich sind. Legen wir nämlich das eine Dreieck dergestalt auf das andere, daß die gleichen Seiten AB, ab und die übereinstimmig liegenden Scheitel A und a, B und b aufeinander zu liegen kommen, so müssen wir zeigen, daß die Dreiecke sich vollkommen decken. In der That trifft ein solches Decken nicht zu, so können, je nachdem die Lage der Seiten es bedingt, dreierlei Fälle stattfinden:

1) Der Punkt c liegt ausserhalb des Dreiecks ABC, wo das Dreieck abc die Lage von ABD genommen hat (Fig. 19). Man hat AC = AD (Annahme), also Dreieck ACD gleichschenklig und Winkel ACD = ADC. Uebrigens Winkel BCD < ACD oder ADC. Anderseits BD = BC (Annahme), daher Winkel BCD = CDB. Ueberdem ADC < BDC oder BCD. Da beide Folgerungen im Widerspruch stehen, so ist der vorliegende Fall nicht zuläßig.

2) Der Punkt c fällt innerhallb des Dreiecks ABC, wo Dreieck abc die Lage von ABD nimmt (Fig. 20). Man ziehe CD und verlängere AC und AD nach E und F. Es ist AD = AC (Annahme), folglich die Winkel ACD und ADC, und ihre Supplementwinkel ECD und FDC gegenseitig gleich. Nun ist der Winkel ECD > BCD, daher auch FDC > BCD. Ausserdem ist BD = CB (Annahme), daher Winkel BCD = BDC. Da FDC < BDC, so ist FDC < BCD. Diese beiden Folgerungen sind abermals im Widerspruch.

3) Der Punkt c des Dreiecks abc kann nicht auf die Seite BC des Dreiecks ABC fallen (Fig. 21), weil es unmöglich ist, daß BD = BC sei.

§. 14. Wird eine Seite AC des Dreiecks ABC (Fig. 22) verlängert, so ist der dadurch entstehende äussere Winkel BCD allemal größer, als jeder der innern gegenüberstehenden Winkel B und A. Die Mitte I von BC verbinde mit A durch eine Gerade AI, mache die Verlängerung IF = AI und ziehe CF. Die Dreiecke IFC, AIB sind gleich, weil AI = IF (Construction), BI = IC (Annahme) und die Scheitelwinkel bei I gleich sind; daher Winkel B = ICF < ICD. — Verlängert man BC nach G, so läßt sich ebenso zeigen, daß Winkel ACG > BAC sei. Aber Winkel BCD = ACG, also auch BCD > BAC.

Hieraus entnehmen wir Folgendes:

1) In jedem Dreiecke ist die Summe zweier Winkel immer kleiner als zwei Rechte. Denn BAC < BCD; wird beiderseits BCA hinzu addirt, so kommt BAC + BCA < BCD + BCA oder < 2 R.

2) Ein Dreieck hat immer wenigstens zwei spitze Winkel; der dritte kann spitz, recht oder stumpf sein. Man nennt ein Dreieck spitzwinklig, wenn es lauter spitze Winkel, stumpfwinklig, wenn es einen stumpfen Winkel enthält.

3) Die von einem auf dem Schenkel eines spitzen Winkels ACD

(Fig. 23) liegenden Punkte A auf den andern Schenkel gezogene Senkrechte AD fällt innerhalb dieses Winkels. Denn fiele dieses Perpendikel wie AB innerhalb des stumpfen Winkels ACE, so gäbe es im Dreiecke ABC einen rechten Winkel B und einen stumpfen Winkel ACB, deren Summe größer als zwei Rechte sein würde.

4) Die von einem auf dem Schenkel eines stumpfen Winkels ACE liegenden Punkte A auf den andern Schenkel gezogene Senkrechte fällt ausserhalb dieses Winkels, d. h. auf die Verlängerung von EC.

5) Die von der Spitze eines Dreiecks auf seine Grundlinie herabgelassene Senkrechte CD (Fig. 13) fällt innerhalb desselben, wenn die an der Grundlinie liegenden innern Winkel beide spitz sind; sie fällt dagegen ausserhalb, wenn einer dieser Winkel ein stumpfer ist.

6) Aus einem gegebenen Punkte kann man auf eine Gerade EF (Fig 23) nur eine einzige Senkrechte ziehen. Wenn der gegebene Punkt in der Linie EF liegt, so ist der Satz für sich klar. Liegt er ausserhalb derselben, in A, und hätte man die beiden Senkrechten AC und AD auf EF; so wären die beiden Winkel D und C rechte, was als unmöglich erwiesen ist.

§. 15. Zwei Dreiecke sind gleich, wenn sie zwei Winkel wechselseitig gleich und eine übereinstimmig liegende Seite gleich haben.

Erster Fall. Die beiden Winkel liegen der gleichen Seite an. Es sei (Fig. 18) AB = ab, A = a, B = b. Man lege das Dreieck abc dergestalt auf das Dreieck ABC, daß die Seite ab auf die ihr gleichen AB, der Punkt A auf a, mithin auch b auf B zu liegen komme. Aus der Gleichheit der Winkel A und a folgt, daß ac in die Richtung von AC fallen müsse. Ebenso wird bc die Richtung von BC nehmen, weil Winkel B = b. Der Punkt c kommt folglich auf den Punkt C zu liegen. Die Dreiecke werden sich mithin decken, folglich in allen Stücken einander gleich sein, oder BC = bc, AC = ac und C = c.

Zweiter Fall. Der eine der beiden Winkel liegt der gleichen Seite an, der andere liegt ihr gegenüber. Es sei (Fig. 24) AB = ab, A = a, C = c. Man nehme an, daß AC > ac sei. Mache AH = ac und ziehe BH. Das Dreieck ABH = abc, weil AB = ab (Annahme), AH = ac (Construction), und Winkel A = a (Annahme); daher Winkel AHB = c. Nun ist aber c = C (Annahme), folglich AHB = C,

was unmöglich ist, da der Winkel AHB ein äusserer Winkel des Dreiecks BHC ist (§. 14). Es muß daher AC = ac sein, mithin auch Dreieck ABC = abc (§. 10).

Zwei rechtwinklige Dreiecke sind demnach gleich, wenn sie ausser der Hypothenuse noch einen spitzen Winkel gleich haben.

§. 16. In jedem Dreieck ABC liegt der größern Seite auch der größere Winkel gegenüber. Es sei (Fig. 27) BC > AC; man behauptet, daß Winkel CAB > B. Man mache CD = AC und ziehe AD. Der Winkel ADC, als äusserer Winkel, ist größer als B (§. 14). In dem gleichschenkligen Dreieck ACD ist aber Winkel ADC = CAD; folglich Winkel CAD > B, also um so mehr CAB > B.

Die drei Winkel eines ungleichseitigen Dreiecks haben demnach eine verschiedene Größe.

Umgekehrt steht in einem Dreieck dem größern Winkel auch die größere Seite gegenüber. Im Dreieck CAB (Fig. 27) sei Winkel CAB > B; es soll bewiesen werden, daß BC > AC. Wäre BC = AC, dann müßte Winkel CAB = B sein, was der Voraussetzung widerspricht. Wäre BC < AC, dann müßte Winkel CAB < B sein, welches der Voraussetzung ebenfalls entgegen ist.

§. 17. Die gerade Linie ist der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten.

1) Irgend eine Seite AB eines Dreiecks ABC (Fig. 28) ist jederzeit kleiner als die Summe der beiden andern AC + BC. Verlängere AC, mache CD = CB und ziehe BD. Das Dreieck CDB ist gleichschenklig, daher Winkel D = CBD. Nun ist Winkel ABD > CBD, mithin auch > D; die Seite AB ist demnach < AD oder AC + CB (§. 16).

2) Wir wollen jetzt die Gerade AB (Fig. 25) mit der beliebig geradgebrochenen Linie AICHB zwischen denselben Endpunkten A und B vergleichen. Ziehen wir vom Punkt A aus die Linien AI, AC, AH nach den verschiedenen Scheiteln, so haben wir AC < AI + IC, desgleichen AH < AC + CH, daher um so mehr AH < AI + IC + CH; ferner AB < AH + HB, folglich AB < AI + IC + CH + HB.

3) Wir betrachten nun die krumme Linie AICHB zwischen denselben Endpunkten. Wir können in der Curve beliebig viele Punkte annehmen, und dieselben je zwei durch gerade Linien verbinden, wo-

durch eine geradgebrochene Linie entsteht, die größer als die Gerade AB ist. Da man die gebrochene Linie der krummen Linie so nahe, als man nur will, bringen kann, indem man die Seite der erstern Linie kleiner macht, wobei sie an Seitenanzahl und Länge zunimmt, so ergibt sich unzweideutig der Satz: daß, wenn zwischen denselben Endpunkten eine Gerade und eine beliebige Curve gezogen wird, die erstere immer kleiner als die letztere ist.

§. 18. Nimmt man innerhalb eines Dreiecks ABC (Fig. 26) einen Punkt D an, und zieht nach den Endpunkten der Basis AB die Geraden AD und DB, so ist die Summe derselben immer kleiner als die der sie einschließenden Geraden AC und CB.

Man verlängere AD bis F, so ist $AF < AC + CF$; mithin, wenn man FB beiderseits addirt, $AF + FB < AC + CB$, weil $CF + FB = CB$. Ebenso ist $DB < DF + FB$, oder wenn man AD addirt, $DB + AD < AF + FB$, folglich um so mehr $AD + DB < AC + CB$.

Auf der andern Seite ist der Winkel ADB als äusserer Winkel des Dreiecks DFB größer als DFB, welcher als äusserer Winkel des Dreiecks ACF größer als C ist, folglich $ADB > C$.

§. 19. Eine geradgebrochene Linie ACDB (Fig. 2) ist convex (erhaben), wenn eine beliebige Gerade IK sie nicht mehr, als in zwei Punkten schneiden kann.

Anmerkung. Dagegen nennt man eine geradgebrochene Linie concav (hohl), wenn sie dieses Merkmal nicht darbietet.

Von zwei geradgebrochenen convexen Linien ACDB, AEFGB, die zwischen denselben Endpunkten gezogen sind, ist die einschließende Linie größer als die eingeschlossene.

Wird nämlich EF verlängert, so ist offenbar $ICDK > IK$; also $ACDB > AEKB$ und so fort; endlich erhält man $ACDB > AEFGB$.

Dasselbe findet zwischen zwei Curvenstücken AEMFB und ACB (Fig. 3) statt. Denn zieht man die Gerade EF, die mit der Curve ACB nur einen Punkt gemein hat, so ist $EF < EMF$ (§. 17); woraus $AECFB < AEMFB$. Zieht man durch zwei, zwischen A und C, C und B liegende Punkte die Geraden IK und LM, die ebenfalls mit der Curve ACB nur einen Punkt gemein haben, so wird man $AIKLMB < AMB$ erhalten.

Auf diese Weise kann man eine beliebige Anzahl gebrochener Linien bilden, welche desto kleiner werden, je mehr sie sich der Curve ACB nähern; man hat daher AMB > ACB.

§. 20. Wenn die Seiten ab, ac des Dreiecks abc (Fig. 29) einzeln genommen, den Seiten AB, AC des Dreiecks ABC gleich sind, der von den beiden letztern eingeschlossene Winkel BAC aber größer als der von den beiden erstern eingeschlossene Winkel bac ist; so ist auch immer die dritte Seite BC des Dreiecks ABC größer als die dritte Seite bc des Dreiecks abc. Man denke sich an die Seite AC den Winkel CAD = bac gelegt, mache AD = AB = ab, und ziehe CD. Dann ist Dreieck CAD = bac, mithin bc = CD, von der wir zeigen müssen, daß sie kleiner als BC sei. Es stelle AI die den Winkel BAD halbirende Linie dar, solche fällt innerhalb des Winkels BAC > CAD; den Durchschnittspunkt I dieser Linie mit BC verbinde durch die Gerade ID. Das Dreieck AID = AIB, weil AB = AD (Construction), die Seiten AI beiden angehört, und die beiden Winkel an A gleich sind; folglich ID = IB. Endlich CD < CI + ID oder BC.

§. 21. Umgekehrt sind zwei Seiten AB, AC (Fig. 29) eines Dreiecks den zwei Seiten ab, ac eines Dreiecks abc gegenseitig gleich, die dritte Seite BC in einem Dreieck aber größer als die dritte Seite bc im andern; so ist auch immer der der größern Seite BC gegenüberstehende Winkel BAC größer als der der kleinern Seite gegenüberstehende Winkel bac. Fände dies nicht statt, so könnte entweder bac gleich oder größer als BAC sein. Im ersten Falle wäre BC = bc; im zweiten Falle wäre BC kleiner als bc, was beides gegen die Voraussetzung streitet. Daher a < BAC.

Anmerkung. Leicht wird sich auch folgender Lehrsatz beweisen lassen. Wenn eine Seite eines Dreiecks größer ist als die eines andern, die anliegenden beiden Winkel aber wechselseitig gleich sind, so sind die den gleichen Winkeln gegenüber liegenden Seiten ungleich, und zwar im ersten Dreieck größer als im zweiten.

§. 22. Die Länge einer geraden Linie A messen (Fig. 30), heißt untersuchen, wie oft diese Linie eine andere bekannte und als

Einheit angenommene B enthält. Am häufigsten ist die Einheit B keine genaue Anzahl mal in A enthalten; wenn man demnach B, so oft es möglich ist, auf A trägt, so wird ein Rest $R < B$ bleiben. In solchem Falle sucht man das gemeinschaftliche Maß von A und B, was auf folgende Weise geschieht: Man trägt den Rest R, so oft es angeht, auf B. Bleibt dabei ein Rest R', so trägt man solchen auf R; der neue Rest R'' wird auf den zweiten Rest R' getragen, und dies so fort, bis man zu einem Reste r gelangt, der in dem vorhergehenden Reste eine Anzahl mal genau enthalten ist. Dieser Rest r ist offenbar das gemeinschaftliche Maß der beiden Linien A und B, d. h. er ist mmal in A und nmal in B genau enthalten. Hiernach $A = mr$, $B = nr$; das Verhältniß $\frac{A}{B}$ also $= \frac{mr}{nr} = \frac{m}{n}$, woraus $A = \frac{m}{n} . B$.

Wäre z. B. A gleich $\frac{5}{7}$ von B, so läßt sich dies folgendermaßen auslegen: theilt man B in 7 gleiche Theile, so enthält A genau 5 solcher Theile, oder das Maß der Länge A ist gleich $\frac{5}{7}$ von der Einheit B.

Die Aehnlichkeit dieser Operation mit der Aufsuchung des gemeinschaftlichen Theilers zweier Zahlen ist leicht zu begreifen, indem das Auftragen von B auf A, so oft es angeht, mit dem Auffinden des Quotienten der Division von A durch B einerlei ist.

Bleibt aber fortwährend bei jeder Division ein Rest, so hat die Operation keine Grenzen, und das Verhältniß von A zu B ist incommensurabel, kann also nicht durch das zweier ganzen Zahlen ausgedrückt werden, weil es keine Länge, so klein sie auch sein mag, gibt, die zugleich in A und B genau enthalten wäre. In solchen Fällen begnügt man sich gewöhnlich mit Annäherungen, wobei die Vergleichung der aufeinander folgenden Reste so weit getrieben wird, bis man zu einem solchen gelangt, der seiner Kleinheit wegen für die Resultate als unerheblich zu betrachten ist.

Anmerkung. Eigentlich kann man auf dem angegebenen Wege nur ein genähertes Verhältniß zweier Linien finden. Ob dies Verhältniß rational oder irrational sei, läßt sich auf diese Art nicht ermitteln. Uebrigens kann man bei gehöriger Sorgfalt mittelst freier Werkzeuge auf die beschriebene Art dem wahren Verhältniß möglichst nahe kommen, oder die Genauigkeit so weit treiben, als es in praktischen Fällen nöthig ist.

Stets kann man Linien durch abstrakte Zahlen darstellen, aus ihnen Formeln zusammensetzen und sie den gewöhnlichen Regeln der

numerischen Rechnungen unterwerfen. In dergleichen Ausdrücken versteht man demnach unter Linie A die ganze oder gebrochene Zahl, welche das Verhältniß der Länge von A zu der Länge der Einheit B angibt. Umgekehrt können auch die numerischen Werthe durch Linien dargestellt werden.

Vom Kreise und vom Messen der Bogen und Winkel.

§. 23. Unter Kreislinie (Fig. 31) versteht man diejenige krumme Linie, deren Punkte sämmtlich in einer Ebene liegen und von einem gewissen Punkte C, welcher der Mittelpunkt oder das Centrum genannt wird, gleich weit entfernt sind. Die von einer Kreislinie umschlossene Ebene heißt Kreis (Kreisfläche), weshalb die Kreislinie, als Grenze des Kreises, auch dessen Peripherie oder Umfang genannt wird. Die vom Mittelpunkte bis an die Kreislinie gezogenen gleichen Geraden CA, CB.... heißen Radien oder Halbmesser. Jede durch den Mittelpunkt gezogene und auf beiden Seiten von der Kreislinie begrenzte Gerade heißt ein Durchmesser oder Diameter; ein solcher ist dem doppelten Radius gleich. Alle Diameter einer Kreislinie sind einander gleich.

Ein Theil AGB des Kreisumfanges heißt ein Kreisbogen; die Gerade AHB, welche die Endpunkte des Bogens mit einander verbindet, ist die Sehne oder Chorde desselben. Der von zwei Halbmessern und einem dazwischen liegenden Bogen eingeschlossene Theil der Kreisfläche ACBG heißt ein Kreisausschnitt oder Kreissector. Den Theil der Kreisfläche AGBH, welcher von einer Sehne und dem dazu gehörigen Bogen begrenzt wird, nennt man Kreisabschnitt oder Kreisegment.

Hieraus folgt:

1) Der Durchmesser ist die größte aller Sehnen. Denn BC+CA $>$ BA (§. 22); BC aber gleich CE, folglich CE + CA oder EA $>$ BA.

2) Der Durchmesser theilt den Kreis in zwei gleiche Theile. Denn faltet man die Figur längs der Geraden AE zusammen, so müssen die zwei Halbkreise sich einander decken, weil sonst nicht alle Punkte der Curve gleiche Entfernungen vom Mittelpunkte C haben würden.

3) Aus demselben Grunde decken sich völlig zwei mit einerlei Halbmesser beschriebene Kreise, wenn man sie mit ihren Mittelpunkten

aufeinander liegt. Desgleichen müssen in dieser Lage zwei Bogen solcher Kreise zusammenfallen.

4) Zwei auf einander senkrechte Durchmesser EA, NF schneiden den Umfang in vier gleiche Bogen, welche man Quadranten nennt.

§. 24. Wenn man aus den Scheiteln C und c (Fig. 32) zweier gleicher Winkel mit einerlei Halbmesser Kreisbogen beschreibt, so sind die zwischen den Schenkeln beider Winkeln enthaltenen Bogen gleich. Denn legt man die eine Figur auf die andere, so daß cb mit CB zusammenfällt, so wird der Radius ca auf den Radius CA, und der Bogen ba auf den Bogen BA zu liegen kommen; ein vollkommenes Decken findet also statt.

Sind umgekehrt die mit einerlei Halbmesser beschriebenen und zwischen den Schenkeln der Winkel enthaltenen Bogen gleich, so sind es auch die Winkel, wie sich leicht einsehen läßt.

1) Gleiche Bogen haben gleiche Sehnen, wofern die Radien dieselben sind. Es sei Bogen AHL = DIF (Fig. 33). Man ziehe die Radien CD, CA, CL, CF; dann die Dreiecke ACL, DCF gleich, weil sie zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel gleich haben; folglich Sehne AL = DF.

2) Umgekehrt müssen die Bogen gleich sein, wenn ihre Sehnen gleich sind. Denn da die Sehne AL = DF, so sind, wenn man die Radien zieht, die Dreiecke CAL, CDF gleich, weil sie die drei Seiten gegenseitig gleich haben; folglich Winkel ACL = DCF, und Bogen AHL = DIF.

Anmerkung. Hierbei müssen übrigens die Bogen beide entweder kleiner oder größer als der halbe Kreisumfang sein.

3) Einen Winkel c zu construiren (Fig. 32), der einem gegebenen Winkel C gleich sei. Ziehe die unbestimmte Linie cb, mit einem beliebigen Radius beschreibe aus den Scheitelpunkten C und c die Kreisbogen AB und ab, von denen der letztere unbestimmt ist; trage dann auf den Bogen ab von b nach a die Länge der Sehne AB. Zieht man ac, so wird der Winkel c dem Winkel C gleich sein, weil die Sehnen vermöge der Construction, also auch die Bogen gleich sind. Die Figuren werden sich mithin vollkommen decken, wenn man sie sich auf einander gelegt denkt.

4) Zwei gegebene Winkel zu addiren (Fig. 34). Mache zuvörderst den Winkel BCA gleich einem der vorgelegten Winkel, darauf BCD gleich

dem ändern, indem die Bogen np, mn bezüglich denjenigen Bogen gleich genommen werden, welche aus den Scheiteln der gegebenen Winkel beschrieben worden sind. Es ist alsdann DCA = BCA + BCD; sind diese letzteren Winkel gleich, so erhält man ihr Doppeltes. Auf ähnliche Weise erhält man das Dreifache u. s. f. eines Winkels.

Die Subtraction läßt sich eben so leicht bewerkstelligen. Denn Winkel BCA = DCA — BCD. Die verschiedenen mit Winkeln zu verrichtenden Operationen werden überhaupt mit den Bogen, welche aus ihren Scheiteln als Mittelpunkten mit einerlei Radius beschrieben sind, vorgenommen.

§. 25. Einen Bogen AGD (Fig. 31) messen, heißt: sein Verhältniß zu einem andern, einerlei Kreise oder gleichen Kreisen angehörigen Bogen, der als Einheit bekannt ist, suchen. Wären diese Bogen rectifizirt, d. h. in gerader Linie ausgestreckt, so würde man mit ihnen wie §. 22 verfahren. Die Rectification ist aber hier keineswegs erforderlich. Man trägt nämlich mit Hülfe des Zirkels, die dem Einheitsbogen AN zukommende Sehne auf den Bogen AD so oft es geht. Hierdurch wird die Zahl bestimmt, welche angibt, wie viel mal die Einheit in dem fraglichen Bogen enthalten ist. Bleibt ein Rest R übrig, so trägt man die Sehne dieses Bogens R auf den als Einheit angenommenen Bogen AN, und dies so fort, als wollte man das gemeinschaftliche Maß der Bogen, wenn solches existirt, suchen. Kurz diese Operation geschieht ganz so wie bei den geraden Linien, selbst in dem Falle, wo die Bogen incommensurabel wären. Die Construction rührt daher, daß gleichen Bogen gleiche Sehnen entsprechen.

Man kann, wie man sieht, Bogen addiren, subtrahiren, multipliciren und dividiren, sie auch durch Zahlen darstellen, und Formeln aus ihnen bilden.

Was die Bogeneinheit anlangt, so ist solche willkührlich; gewöhnlich wird dazu die Viertelkreisperipherie oder der Quadrant genommen. Da man den Quadranten als Bogeneinheit gewählt hat, so nimmt man als Winkeleinheit den rechten Winkel an, den wir in der Folge durch R darstellen wollen.

§. 26. In einem und demselben Kreise oder gleichen Kreisen gehört zu dem größern Bogen eine größere Sehne und umgekehrt, in so fern die Bogen kleiner als die halbe Kreislinie sind.

1) Wenn der Bogen AHL > DIB ist (Fig. 33), so nimmt man DIF = AHL und zieht die Sehne DF, welche dann gleich AL ist (§. 24). In den zwei Dreiecken DCB, DCF sind zwei Seiten gleich, der eingeschlossene Winkel DCF aber größer als DCB, folglich die dritte Seite DF > DB.

2) Wenn die Sehne AL > DB ist, so haben die Dreiecke ACL, DCB zwei Seiten gleich; die dritte AL aber größer als DB; also Winkel ACL > DCB, Bogen AHL daher > DIB.

§. 27. Das Verhältniß zweier Winkel BCA, DON (Fig. 35) ist ganz dasselbe, wie das der Bogen ba, dn, die aus den Scheiteln dieser Winkel mit einerlei Halbmesser beschrieben und zwischen den Schenkeln derselben enthalten sind.

1) Wenn die Bogen ba, dn commensurabel sind, so wird ihr gemeinschaftliches Maß dx mmal im Bogen ba, und pmal im Bogen dn enthalten sein; demnach $\frac{ba}{dn} = \frac{m}{p}$. Verbindet man die Theilungspunkte x, y... mit den Scheiteln O, C der entsprechenden Winkeln durch gerade Linien Ox, Oy....; so theilt man die vorgelegten Winkel in m und p gleiche Winkel xOd, yOx....; folglich $\frac{BCA}{DON} = \frac{m}{p}$. Aus den beiden vorstehenden Gleichungen ergibt sich

$$\frac{BCA}{DON} = \frac{ba}{dn} \ldots\ldots (A).$$

2) Sind die Bogen incommensurabel, so theile man den einen von ihnen nd in eine beliebige Anzahl p gleicher Theile dx, xy..., und trage solche dann auf den andern Bogen ba. Es sei i der von a nächstliegende Theilungspunkt. Wird die Linie IC gezogen, so hat man $\frac{ICB}{DON} = \frac{bi}{dn}$, weil die Bogen dn, bi commensurabel sind. Nun ist Winkel ICB = BCA + ICA, und Bogen bi = ba + ia; folglich

$$\frac{BCA}{DON} + \frac{ICA}{DON} = \frac{ba}{dn} + \frac{ia}{dn}.$$

Der Winkel ICA und der Bogen ia ändern sich mit der Zahl p der Theilungspunkte des Bogens nd, und können so klein als man nur will gemacht werden, während die andern Größen beständig

bleiben. Der zweite und vierte Bruch sind also Größen, die man auf jeden beliebigen Grad von Kleinheit bringen kann; geht man zu den Grenzen über, so kommt $\frac{BCA}{DON} = \frac{ba}{dn}$. [S. d. niedere Algebra (§. 22.)]

Anmerkung. Man darf nicht vergessen, daß die Gleichheit zweier Verhältnisse mit einer Proportion gleichlautend ist. In der Geometrie hat der Sprachgebrauch vorgezogen, für BCA dividirt durch DON gleich ba dividirt durch dn, zu sagen: BCA verhält sich DON wie ba zu dn. Es gilt ein Gleiches in der gesammten Elementargeometrie.

§. 28. Um das Verhältniß zweier Winkel zu finden, ist es daher nicht nothwendig, mit solchen eine Operation wie die über die Linien angegebene (§. 22) vorzunehmen, was hier äusserst mühsam sein würde. Das gesuchte Verhältniß wird durch das Verhältniß der Kreisbogen ersetzt.

Hieraus ergibt sich:

1) Das Verhältniß der Flächeninhalte der Kreisausschnitte ist dasselbe, wie das der Bogen.

2) Nimmt man als Einheitsbogen (Fig. 35) den zwischen den Schenkeln des Einheitswinkels DON enthaltenen Bogen dn, wobei dn und DON jeder als Einheit seiner Art gilt; so gibt unsere Gleichung (A) .... BCA = ba. — Jeder Winkel hat also den aus seinem Scheitel als Mittelpunkte zwischen seinen Schenkeln beschriebenen Bogen zum Maß. Wie schon gesagt, eignet sich für die Winkeleinheit am passendsten der rechte Winkel, der offenbar den vierten Theil des Umkreises zwischen seinen Schenkeln faßt.

Anmerkung. In der Gleichung BCA = ba wird stillschweigend eine Bedingung vorausgesetzt, denn der Winkel BAC kann nie gleich dem Bogen ba sein. In der That kommt daselbst nicht mehr ein Winkel und ein Bogen vor, zwei abstrakte Zahlen sind es vielmehr, die anzeigen, wie viel mal der Winkel und der Bogen jeder die Einheit seiner Art DON und dn enthält. Die Gleichung BCA = ba drückt hiernach ganz das Nämliche, wie die Gleichung $\frac{BCA}{DON} = \frac{ba}{dn}$ aus. Es findet dies gleicherweise in jeder Formel statt; die darin vorkommenden Buchstaben sind

nichts anders als abstrakte Zahlen, welche die Verhältnisse der mit der Einheit verglichenen Größen darstellen. — Wenn man sagt: „der Bogen ist das Maß eines Winkels“, so sagt man eigentlich etwas Unrichtiges, weil man eine Größe nur durch eine ihr gleichartige messen kann, und der Bogen und Winkel nicht von gleicher Art sind. Man darf darunter nur Folgendes verstehen: die Winkel wachsen in dem nämlichen Verhältnisse wie die Bogen; die Zahl, welche das Maß eines Winkels ausdrückt, gibt gleichzeitig auch das des Bogens.

3) Werden aus dem Scheitel C der Winkel BCA und DCA (Fig. 36) die Bogen abd und a′b′d′ beschrieben, so hat man $\frac{BCA}{DCA} = \frac{ab}{ad} = \frac{a'b'}{a'd'}$. Die Größe des Radius cb oder cb′ ist also bei dem Maße der Winkel willkührlich. Man hat hier $\frac{ab}{a'b'} = \frac{ad}{a'd'}$; die Bogen ab und a′b′ verhalten sich wie ihre ganzen Umfänge; solche Bogen nennt man ähnliche Bogen.

Anmerkung. Um also das Verhältniß zweier Winkel zu finden, hat man nur nöthig, das Verhältniß der aus ihren Scheiteln, als Mittelpunkten, mit einem zwar willkührlichen, aber für beide Winkel gleichen Halbmesser zwischen ihren Schenkeln beschriebenen Kreisbogen zu suchen.

§. 29. Die auf dem Papier verzeichneten Winkel werden mittelst eines Transporteurs gemessen. Es ist dies ein in eine Anzahl gleicher Theile getheilter Halbkreis, wodurch sich das Verhältniß der Bogen zum Quadranten angeben läßt. Die gefundene Zahl drückt das Maß der Winkel, oder ihr Verhältniß zum rechten Winkel aus. Ein ähnlicher Halbkreis, der auf einem Fuß oder Stativ steht und mit beweglichen Diopternlinealen versehen ist, um nach entfernten Punkten visiren zu können, dient zum Messen der Winkel auf dem Felde. Zu diesem Zweck hat man übrigens sehr verschiedenartige Instrumente construirt, deren Beschreibung wir hier übergehen, um uns nicht zu weit von unserm Gegenstande zu entfernen.

Man theilt gewöhnlich den Quadranten in 90 gleiche Theile oder Grade, den Grad in 60 Minuten, die Minute in 60 Sekunden. Ein Winkel oder Bogen von 18 Grad 54 Minuten und 55 Sekunden wird

folgendermaßen geschrieben: $18^0\ 54'\ 55''$. Da die Sexagesimaleintheilung des Kreises bei Construction der Tafeln und der Instrumente gebräuchlich ist, so wollen wir solche der in der neueren Zeit eingeführten und für die Rechnung bequemeren Decimaleintheilung vorziehen. Nach dieser Eintheilung wird der Quadrant in 100 Grade, der Grad in 100 Minuten, die Minute in 100 Sekunden eingetheilt. Hiernach wird ein Bogen von $18^0\ 54'\ 55''$ so viel als 18,5455 Grad oder 0,185455 vom Quadranten bezeichnen.

Von den senkrechten, schiefen und parallelen Linien.

§. 30. Wenn man von einem beliebigen Punkte A der auf EF senkrechten Geraden AD (Fig. 23) die schiefen Linien AF, AC, AB zieht, so ergeben sich folgende Sätze:

1) Die Senkrechte AD ist kürzer als jede schiefe Linie AC.

2) Die schiefen Linien, welche gleich weit vom Fuße D des Perpendikels abstehen, sind einander gleich und bilden nach Innen spitze und gleiche Winkel.

3) Von zwei schiefen Linien AC, AB ist diejenige, welche am weitesten vom Fuße D des Perpendikels absteht, die größere; sie macht übrigens auf einerlei Seite der Senkrechten AD einen kleinern spitzen Winkel, d. h. $ABD < ACD$.

1) Da das Dreieck ACD rechtwinklig in D ist, so ist der Winkel $D > ACD$ (§. 14); woraus $AD < AC$ (§. 16). Die Senkrechte AD ist demnach die kürzeste von allen Linien, die man vom Punkte A nach den Geraden EF ziehen kann. Die Winkel ACD, ABD sind sämmtlich spitz.

2) Hat man $CD = CF$, so sind die Dreiecke ACD, AFD gleich; folglich $AC = AF$, und Winkel $ACD = AFD$.

3) Hat man $BD > CD$, so ist der Winkel ACB ein stumpfer (§. 14); folglich Winkel $ACB > ABC$, woraus $AB > AC$. Ferner Winkel ABE, als äusserer Winkel des Dreiecks ABC, $> ACB$; folglich, wenn man die Supplementwinkel nimmt, $ABC < ACD$. Die schiefen Linien werden also desto größer, je weiter sie sich von der Senkrechten AD entfernen, und bilden auf einerlei Seite der Senkrechten mit der Geraden EF immer kleinere und kleinere Winkel.

Hieraus folgt, daß man von einem Punkte A, der auf EF Senkrechten AD nur zwei gleiche schiefe Linien ziehen kann.

§. 31. Umgekehrt: 1) Ist eine Linie AD die kürzeste, die man von A auf EF ziehen kann, so steht sie auf EF senkrecht. Denn stände auf EF eine andere Linie AC senkrecht, so würde sie kleiner als AD sein, was der Voraussetzung zuwider läuft.

Anmerkung. Das natürliche Maß der Entfernung eines Punktes von einer Linie ist folglich die von dem fraglichen Punkte auf jene Gerade gezogene Senkrechte.

2) Zwei einander gleiche schiefe Linien AC, AF müssen zu beiden Seiten der Senkrechten gleich weit von ihr entfernt sein, d. h. CD = DF. Denn wäre CD > oder < DF, so wäre auch AC > oder < AF.

3) Ist AB > AC, so hat man auch BD > CD. Denn wäre BD = oder < CD, so müßte BA = oder < AC sein.

Hieraus folgt, daß alle Punkte G, A der durch die Mitte D von CF (Fig. 37) errichteten Senkrechten AD von den Punkten C und F eine gleiche Entfernung haben, d. h. AC = AF, und GC = GF. Denn diese Geraden sind nichts anders als schiefe Linien, die gleich weit vom Fuße des Perpendikels entfernt sind.

§. 32. Jeder ausserhalb der durch die Mitte von CF gezogenen Senkrechten AD gelegene Punkt I liegt demjenigen der beiden Endpunkte F näher, mit dem er auf einerlei Seite sich befindet. Denn zieht man IC, IF und FG, so hat man Winkel GCF = GFC; folglich Winkel IFC > ICF, woraus IC > IF (§. 16.)

Diese Eigenschaft der Senkrechten, alle ihre Punkte von C und F, welche vom Fuße D gleich weit entfernt sind, ebenfalls gleich weit abstehend zu haben, ist eine sie charakterisirende Eigenschaft, weil solche ihr allein zukommt. Sind also zwei Punkte A und H (Fig. 38) einer Geraden AH jeder gleich weit von C und F entfernt, so ist diese Gerade AH senkrecht auf CF, und theilt sie überdies in zwei gleiche Theile.

§. 33. Eine gegebene Gerade CF von bestimmter Länge (Fig. 38) durch eine Senkrechte AH zu halbiren. Aus dem Punkte C und F beschreibe mit einem beliebigen, einem und demselben Halbmesser zwei Kreisbogen. Ist der Radius größer

als die Hälfte von CF genommen, so schneiden sich diese Bogen in einem Punkte A, der auf der verlangten Senkrechten liegen wird. Dieselbe Construction verrichte unterhalb CF, wo sich die Kreisbogen in einem Punkte H der gesuchten Senkrechten schneiden werden. Verbinde dann die Punkte A und H, so wird AH die verlangte Senkrechte sein. Man hätte auch andere Radien annehmen können, wodurch z. B. in I sich schneidende Bogen entstanden wären, welcher Punkt I gleichfalls ein Punkt unserer Senkrechten ist. — Diese Construction gibt zugleich die Mitte D der gegebenen Linie CF.

§. 34. Von einem gegebenen Punkte eine Senkrechte AH (Fig. 39 und 40) auf eine gegebene Gerade zu errichten.

1) Der gegebene Punkt liegt in D auf der Geraden DB. Man nehme DC = DF, und beschreibe aus C und F mit einerlei Halbmesser zwei Kreisbogen, welche sich im Punkte A schneiden. Die Linie AD wird auf DB senkrecht sein.

2) Der gegebene Punkt liegt ausserhalb der Geraden DB in A. Aus A beschreibe mit einem beliebigen, jedoch hinlänglich großen Halbmesser einen Kreisbogen CF, welcher DB in den Punkten C und F schneidet. Aus diesen Punkten beschreibe dann mit einem willkührlichen Halbmesser zwei Kreisbogen, welche sich in I oder H schneiden. Die Gerade AI oder AH wird die verlangte Senkrechte sein.

Die Senkrechte AD (Fig. 37) bestimmt den Punkt D, den man die Projection des Punktes A auf der Linie CF nennt. Jeder Punkt von CA hat ebenso seine Projection. Die Linie CD ist die Projection von CA, von CG.... in Bezug auf die Linie CF.

§. 35. Zwei Punkte G und B und eine Linie AK (Fig. 41) sind gegeben. In dieser Linie einen Punkt F zu finden, daß die von ihm an die gegebenen Punkte gezogenen Linien FG und FB mit der gegebenen Linie gleiche Winkel machen, nämlich Winkel GFA = BFC.

Fälle aus B die Normale BD auf AK und mache CD = BC. Zieht man nun die Linie DG, so schneidet diese die AK in dem verlangten Punkte F; denn die Dreiecke FCD und FBC sind gleich, woraus BFC = CFD = AFG.

Innerhalb des Winkels NAC (Fig. 42) sind die Punkte G und B gegeben. Man soll die Linie FB, LF, LG dergestalt ziehen, daß

sie je zwei gleiche Winkel mit den Schenkeln des Winkels A bilden, nämlich BFC = LFA, und FLA = GLN. Verrichte für den Punkt B und die Linie AC die vorige Construction, d. h. mache CD = CB auf der zu AC Senkrechten BD. Da jeder Punkt F der Linie AC zwei Linien FD, FB gibt, die gleiche Neigung gegen AC haben, so wird die gesuchte Gerade LF durch den Punkt D gehen müssen, der in unserer Aufgabe die Stelle von B vertreten kann. Es bliebe demnach nur noch übrig, aus den Punkten D und G zwei Linien DL und LG zu ziehen, die mit AC gleiche Winkel bildeten. Wir hätten also für den Punkt D und die Linie AN die vorige Construction noch einmal auszuführen. Wir errichten daher auf die verlängerte NA die Senkrechte HD und machen HI = ID; ziehen dann HG und verbinden den Durchschnittspunkt L der Linie HG und AN mit dem Punkt D durch die Gerade LD. Diese Linie gibt den Punkt F, wodurch die Gerade FB, bestimmt ist. Die Linien BF, FL und LG erfüllen also die verlangten Bedingungen.

Ebenso gibt die in Fig. 43 dargestellte Construction den Umfang BFLMK an, welcher die äussersten Punkte B und K durch eine Reihe von gebrochenen Linien verbindet, die je zwei mit den aufeinander folgenden Seiten der Figur MNAC gleiche Winkel machen. Man kann ähnlicherweise mit vier Linien, die drei Winkel bilden, verfahren, u. s. w. Vorstehende Construction löst vollständig die Aufgabe über das Rückprallen der Kugeln beim Billardspiele.

§. 36. Zwei gerade Linien AB, CD (Fig. 45), welche, obgleich in einer Ebene liegend, einander nie begegnen, so weit man sie auch nach einer oder der andern Seite hin verlängern mag, heißen Parallellinien. Die sie schneidende Gerade EF wird Secante genannt. Die Winkel EHB, HID, auf einerlei Seite der Secante, der eine ausserhalb, der andere innerhalb der Parallelen, heißen korrespondirende oder Gegenwinkel. Die Winkel, welche auf beiden Seiten der Secante liegen, heißen Wechselwinkel. Die innern Winkel liegen innerhalb der Parallelen; die äussern Winkel dagegen ausserhalb derselben. Es gibt innere Wechselwinkel, wie AHI und HID, und äussere Wechselwinkel, wie EHB und CIF. In den beiden letztern Fällen haben die Winkel ihre Oeffnung nach entgegengesetzter Seite gekehrt. Die Winkel BHI und HID sind innere auf einerlei Seite liegende Winkel. EHB und FID sind äussere auf einerlei Seite liegende Winkel.

Zwei Gerade Linien AB, CD (Fig. 45), die in einer Ebene liegen und durch eine Secante EF geschnitten werden, sind parallel, wenn sie eine von den fünf folgenden Bedingungen erfüllen:

1) Wenn die Gegenwinkel, wie EHB und HID, gleich;

2) die innern Wechselwinkel, wie AHI und HID gleich;

3) die äussern Wechselwinkel, wie EHB und CIF gleich;

4) die innern an einerlei Seite liegenden Winkel zusammengenommen zwei Rechte betragen, d. h. BHI + HID = 2R;

5) die äussern an einerlei Seite liegenden Winkel zusammengenommen zwei Rechte betragen, d. h. EHB + DIF = 2R.

Erster Fall. EHB = HID. Würden die Geraden AB, CD sich in O treffen (Fig. 44), so entstände ein Dreieck HIO, in dem der äussere Winkel EHB > HID wäre, was gegen die Voraussetzung ist.

Zweiter Fall. AHI = HID. Wäre das Dreieck HIO möglich, so würde der äussere Winkel AHI > HID sein, was abermals gegen die Annahme ist.

Dritter Fall. EHB = CIF. Da diese Winkel die Scheitelwinkel der vorigen sind, so ist dies gerade so viel, als ob man AHI = HID hätte.

Vierter Fall. BHI + HID = 2R. Das Dreieck HOI ist alsdann unmöglich (§. 14).

Fünfter Fall. EHB + DIF = 2R. Da HID + DIF = 2R, so folgt, daß EHB = HID, was den ersten Fall wieder gibt.

Zwei gerade Linien AB, CD (Fig. 45) sind ferner parallel, wenn sie auf einerlei dritten LM senkrecht stehen. Denn träfen die Linien AB, CD in einem Punkte O zusammen (Fig. 44), so könnte man von einem Punkte O zwei Senkrechte OH, OI auf eine Linie EF ziehen, was unmöglich ist (§. 14).

§. 37. Die umgekehrten Sätze finden ebenfalls statt. Zuvörderst ist klar, daß ein Winkel BCA (Fig. 46), so klein er auch sein mag, immer größer als ein Streifen BCEF ist, der durch die beiden auf

der Geraden CD errichteten Senkrechten BC, EF gebildet wird. In der That beschreibt man aus C mit einem beliebigen Radius den Kreisbogen bd, so wird der Winkel BCA eine bestimmte Anzahl mal n in dem rechten Winkel BCD enthalten sein, und zwar gerade so viel mal, als der Bogen ba in dem Quadranten bd enthalten ist. Wir tragen nun längs der unbestimmten Linie CD n der Linie CE gleiche Theile bis an den Punkt M auf; errichten dann durch sämmtliche Theilpunkte über der Geraden CD die Senkrechten EF, GH... MN. Wir erhalten dadurch n unter einander gleiche Streifen BCEF, EFGH.... Denn dreht man die Figur um EF, so wird der Streifen FEGH den Streifen BCEF vollkommen decken. Da nun die Fläche des rechten Winkels BCD n mal die des Winkels BCA enthält, während n Streifen wie BCEF den unbestimmten Flächenraum des rechten Winkels nicht ausfüllen können, so hat man $n \times BCA > n \times BCEF$, oder $BCA > BCEF$.

Die Fläche des Winkels BCA, so klein solcher auch sein mag, kann demnach in dem Streifen BCEF nicht eingeschlossen sein; die Linie CA muß daher, gehörig verlängert, die Gerade EF irgendwo schneiden. Jede Gerade CA, welche mit der Linie CD einen kleinern als einen rechten Winkel macht, muß also die auf der Linie CD errichtete Senkrechte EF schneiden.

Anmerkung. Man sieht bald ein, daß der eben erwiesene Satz mit dem eilften Grundsatze in den Elementen des Euclides zusammenfällt, wo er in folgender, weniger anschaulichen Form aufgeführt wird: Werden zwei Linien von einer dritten geschnitten, und sind die beiden innern, auf einer Seite liegenden Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte, so müssen diese Linien, genugsam verlängert, auf eben dieser Seite zusammentreffen. Die mannigfachsten Versuche sind gemacht worden, um diesen Grundsatz auf eine rein elementarische, von dem Begriffe des Unendlichen unabhängige Art zu beweisen. Die deshalb angewandte Mühe war jedoch vergeblich und mußte es sein. Denn unmöglich konnten die allgemeinen Grundsätze der Mathematik und die bis hierher erwiesenen Lehrsätze der Geometrie zur Begründung einer Paralleltheorie völlig ausreichen, weil die einfachen Größenvergleichungen und die Bedingungen, unter denen Winkel und Dreiecke gleiche

Größe haben, von den Bedingungen, unter denen Linien nie zusammentreffen, der Natur der Sache nach sehr verschieden sind. Ein der Lehre der Parallelen eigenthümliches Princip zum Grunde zu legen war daher nothwendig. Ein solcher Fundamentalsatz ist nachstehender Satz, der mit unserm Begriff von der geraden Linie im genauesten Zusammenhange zu stehen scheint: Wenn eine Linie A auf einer Linie B senkrecht steht und die Linie C trifft dieselbe unter einem spitzen Winkel, so müssen A und C, gehörig verlängert, sich schneiden. Wer diesen Satz durchaus erwiesen haben will, dem wird der vom Verfasser oben angegebene, in der That sinnreiche Beweis genügen.

Aus Obigem ergibt sich:

1) Wenn zwei Gerade BA, DC (Fig. 45) parallel sind, so ist die Linie LM, die auf der einen CD senkrecht steht, auch auf der andern AB senkrecht. Wäre dies nicht der Fall, so müßte AB die Linie CD schneiden. Es heißt dies so viel, als durch einen Punkt L kann man nur eine Parallele zu CD ziehen, nämlich die auf LM Senkrechte AB.

2) Wenn zwei parallele Linien AB, CD von einer Linie EF geschnitten werden, so sind die correspondirenden Winkel, wie EHB und HID gleich; die innern Wechselwinkel, wie AHI und HID, gleich; die äussern Wechselwinkel, wie EHB und CIF, gleich. In der That, wenn man von der Mitte K der Linie HI die Senkrechte LM auf eine der Parallelen fällt, so sind die Dreiecke KIM und LKM gleich, weil die Winkel L und M als rechte gleich und die Winkel bei K als Scheitelwinkel gleich sind, und KI = KH (Construction); daher Winkel LHK = KIM. Da letztere Winkel zu EHB, CIF Scheitelwinkel sind, so sind diese vier Winkel unter einander gleich.

3) Die innern oder äussern an einerlei Seite liegenden Winkel betragen zusammen zwei Rechte. Man hat AHI + BHI = 2R, und AHI = HID; folglich BHI + HID = 2R. Ebenso hat man EHB = HID, und HID + FID = 2R; daher EHB + FID = 2R.

4) Die Winkel, welche eine Secante mit den Parallelen bildet, sind gleich, wenn sie gleichartig, d. h. beide

stumpf oder spitz sind; sie ergänzen einander zu zwei Rechten, wenn sie ungleichartig sind, d. h. der eine spitz, der andere stumpf ist.

§. 38. Um also zu einer gegebenen geraden Linie AB (Fig. 47) durch einen Punkt C eine Parallele zu ziehen, wird man von einer der sechs gedachten Eigenschaften Gebrauch machen. Mit einem beliebigen Radius CB beschreibt man z. B. aus C und B die Kreisbogen BI und CH. Nimmt man den Bogen BI = GH, so wird die erhaltene Gerade CD mit AB parallel sein; denn sie geht durch den Punkt C, und wenn man die Secante CB zieht, so sind die Winkel ABC und BCI nach der Construction gleich (§. 24).

§. 39. Aus den vorangehenden Sätzen folgt:

1) Zwei Linien AC, BD (Fig. 48), die zu einer und derselben dritten EF parallel sind, müssen es auch zu einander sein. Denn die auf EF errichtete senkrechte Linie ist es auch auf den beiden andern AC und BD, welche, da sie auf einer und derselben dritten senkrecht stehen, einander nicht schneiden können.

2) Zwei Winkel CAB, DEF (Fig. 49), deren Schenkel einander parallel sind, und deren Oeffnung nach einerlei Richtung liegt, sind immer gleich. Wenn man EF nach G verlängert, so sind in Bezug auf die Parallelen AC, ED die Winkel DEF und CGF als Gegenwinkel gleich. Ebenso sind, wenn man die Parallelen AB, GF betrachtet, die Winkel CGF und CAB als Gegenwinkel gleich; folglich CAB = DEF. Verlängert man die Seite EF, so sind die Winkel DEI und BAC, deren Oeffnung nicht nach einerlei Richtung liegt, nicht mehr gleich, in solchem Falle sind sie Supplementwinkel zu einander.

3) Zwei Parallele AB, CD (Fig. 47) sind überall gleich weit von einander entfernt. Aus zwei beliebigen Punkten A und B, und der Mitte E von AB seien die Linien AC, BD, EF senkrecht auf AB gezogen; sie werden es daher auch auf CD sein. Dreht man nun die Figur um EF, so wird die Linie EB mit der ihr gleichen AE zusammenfallen, und BD, wegen der rechten Winkel, die Richtung von AC nehmen, FD endlich auf FC zu liegen kommen. Der Punkt D fällt demnach auf den Punkt C; folglich AC = BD.

4) Da zwei Parallelen immer die erwähnten Eigenschaften haben, und da zwei Linien, wenn ihnen diese Eigenschaften zukommen, immer parallel sind, so folgt, daß gerade Linien, denen diese Eigenschaften fehlen, nicht parallel sind.

§. 40. Die Stücke AB, CD (Fig. 50) zweier Parallelen, welche zwischen zwei andern Parallelen liegen, sind einander gleich und umgekehrt. Denn zieht man BC, so erhält man die gleichen Dreiecke ABC, DBC, weil BC = BC, die Winkel BCD und ABC als innere Wechselwinkel gleich sind, und die Winkel BCA und DBC aus demselben Grunde gleich sind. Folglich AB = CD, und BD = AC. Der zweitvorhergehende Satz (Nr. 3) ist nur ein besonderer Fall des eben erwiesenen.

Wenn umgekehrt AB = CD, und AC = BD, so sind die beiden Dreiecke abermals gleich, weil sie die Seiten einzeln genommen gleich haben. Daher Winkel DCB = ABC, und DBC = BCA; woraus folgt, daß AB parallel mit CD, und AC parallel mit BD ist.

Ist endlich AB gleich und parallel mit CD, so ist auch AC gleich und parallel mit BD, weil die beiden Dreiecke ebenfalls noch gleich sind, &c.

§. 41. Auf dem Schenkel KI (Fig. 51) eines gegebenen Winkels IKC werde ein beliebiger Punkt E angenommen, und ED parallel mit KC gezogen; EF darauf gleich KE gemacht und K und F durch eine Gerade verbunden. In dem gleichschenkligen Dreiecke EKF ist Winkel EKF = F. Da die Winkel F und FKC als innere Wechselwinkel gleich sind, so theilt die Linie KF den Winkel EKC in zwei gleiche Theile. Macht man ebenso FD = FK, so ist der Winkel DKC die Hälfte von FKC, oder der vierte Theil von IKC, &c. Mittelst dieser Construction kann man einen Winkel IKC in 2, 4, 8.... 2^n gleiche Theile theilen.

Von den Senkrechten und Parallelen im Kreise und vom Verhalten der Kreise zu einander.

§. 42. Der auf einer Sehne AB senkrecht stehende Radius CD geht durch die Mitte dieser Sehne und durch die Mitte des zu ihr gehörigen Bogens ADB (Fig. 52). Die gleichen schiefen Linien CA, CB beweisen vorerst, daß E die

Mitte von AB ist (§. 30). Wird dann die Figur um CD gedreht, so fällt der Punkt A auf den Punkt B, und AD kommt auf DB zu liegen; D ist demnach die Mitte des Bogens ADB.

§. 43. Da der Mittelpunkt C des Kreises, die Mitte E einer Sehne und die Mitte des von der Sehne bespannten Bogens stets in derselben Geraden liegen, so folgt hieraus, daß jede Linie CD, wenn sie durch zwei eben gedachter Punkte geht, auch durch den dritten gehen müsse und zugleich auf der Sehne senkrecht stehe. Da man ferner von einem gegebenen Punkte C, E oder D auf eine Gerade AB nur eine einzige Senkrechte herablassen kann, so ergibt sich aus dem Vorhergehenden noch, daß die aus einem der genannten Punkte auf die Sehne gefällte Senkrechte auch durch die beiden andern gehen müsse. Finden daher von den vier Bedingungen, nämlich dem Senkrechtstehen auf einer Sehne, dem Gehen durch den Mittelpunkt, dem Treffen der Mitte der Sehne und der des dazu gehörigen Bogens zwei derselben statt, so sind auch die beiden übrigen erfüllt. — Man kann übrigens jeden der in diesem Satze enthaltenen sechs Fälle einzeln auf direkte Art beweisen, indem man ihn ähnlicherweise wie den hier zum Grund gelegten behandelt.

§. 44. **Um einen Bogen ADB oder einen Winkel ACB** (Fig. 52) **zu halbiren**, ist es daher hinreichend, aus dem Mittelpunkte C auf die Sehne AB die Senkrechte CD zu ziehen. Da man durch dasselbe Mittel die Hälfte von Neuem zu halbiren vermag, u. s. w., so wird die Theilung eines Bogens oder Winkels nach den Zahlen 2, 4, 8.... 2^n bewerkstelligt werden können (§. 41).

§. 45. **Durch drei Punkte** N, B, D (Fig. 53) **eine Kreislinie zu legen.** Man ziehe die Geraden NB und BD; errichte dann aus der Mitte E und F die Senkrechten HE und IF. Jeder Punkt von HE ist gleichweit von N und B entfernt. Da solche Punkte allein diese Eigenschaft besitzen, so werden die Mittelpunkte sämmtlicher durch N und B gehender Kreise in der Senkrechten HE liegen. Dasselbe wird für die Linie FI in Bezug auf die Punkte B und D statt finden. Der Durchschnittspunkt C der Linien HE und FI ist also gleich weit von den Punkten N, B und D entfernt. Da er allein diese Bedingung erfüllt, so ist er der Mittelpunkt des einzigen, durch die drei Punkte zu legenden Kreises.

Die Aufgabe wird unmöglich, wenn die drei Punkte N, B, D in einer und derselben geraden Linie liegen, weil die Senkrechten FI und HE sich nirgends schneiden werden. In jedem andern Falle aber schneiden sich die Senkrechten FI und HE. Denn wären die beiden letztern Linien parallel, so würden die auf ihnen bezüglich senkrechten Geraden BN, BD nur eine einzige Linie ausmachen, weil man sonst von B auf HE zwei Senkrechte NB und die verlängerte DB haben würde.

Zu bemerken ist, daß die aus der Mitte der Linie ND zu ihr errichtete Senkrechte ebenfalls durch den Punkt C geht, da derselbe gleich weit von N und D entfernt ist. Die drei gedachten Perpendikel treffen also in dem Punkte C zusammen; man bestimmt diesen Punkt, indem man zwei beliebige von den drei Sehnen NB, ND, BD in Betracht nimmt. Aus dem Vorbergehenden folgt:

1) Zwei Kreislinien können nicht drei Punkte gemein haben, ohne zusammenzufallen.

2) Leicht ist es, zu einem gegebenen Kreise oder Kreisbogen den Mittelpunkt zu finden, man braucht deshalb nur drei Punkte auf der Peripherie anzunehmen, und die obige Construction auszuführen.

§. 46. Eine gerade Linie kann eine Kreislinie höchstens in zwei Punkten schneiden. Denn könnte eine gerade Linie die Peripherie in drei Punkten schneiden, so würden sich von dem Mittelpunkte des Kreises drei unter einander gleiche gerade Linien an eine und dieselbe Gerade ziehen lassen (§. 30). Eine Gerade FG (Fig. 54), die mit dem Kreise nur einen Punkt gemein hat, heißt Tangente, oder Berührungslinie. Die Tangente steht auf dem zu ihr gezogenen Halbmesser CF senkrecht. Denn da jeder andere Punkt G der Tangente ausserhalb des Kreises liegt, mithin $CG > CF = CF$ ist; so folgt, daß der Halbmesser CF die kürzeste Linie ist, die man von C nach FG ziehen kann, d. h. daß CF senkrecht auf FG steht (§. 30).

Und umgekehrt eine gerade Linie, welche durch einen Punkt der Kreislinie auf dem durch diesen Punkt gehenden Halbmesser senkrecht steht, ist eine Tangente des Kreises. Denn da jede schiefe Linie CG größer als CF ist, so liegt jeder andere Punkt von FG ausserhalb des Kreises.

Um also durch einen im Umkreise gegebenen Punkt F eine Tan-

gente zu legen, muß man den Radius CF und seine Senkrechte TG ziehen.

§. 47. Ein Kreis ABI (Fig. 55) zu beschreiben, der eine der Lage nach gegebene Gerade AT in einem gegebenen Punkt A berührt und durch einen andern gegebenen Punkt B geht. Da AB eine Sehne des gesuchten Kreises ist, so wird der Mittelpunkt auf der über der Mitte von AB errichteten Senkrechten liegen. Desgleichen wird er sich auf der über der Tangente AT senkrechten Linie AG befinden; er liegt also im Punkte C, wo die beiden Perpendikel zusammentreffen. Man ziehe demnach AG senkrecht auf AT, und errichte aus der Mitte von BA die Senkrechte EF. Der gemeinschaftliche Durchschnitt C beider Senkrechten wird der Mittelpunkt und AC der Radius des gesuchten Kreises sein.

§. 48. Die in einem Kreise zwischen zwei parallelen Sehnen AB, DE liegenden Bogen AD, BE (Fig. 54) sind einander gleich. Man ziehe den Radius CF senkrecht auf eine der beiden Sehnen; er theilt dann die Bogen AFB und DFE in zwei gleiche Theile. Wenn man nun von den gleichen Bogen AF und FB die gleichen Bogen DF und FE abzieht, so sind die Reste AD und EB gleich. — Der Mittelpunkt C des Kreises kann auch zwischen den beiden Sehnen, wie AB und D′E′, liegen. Man hat hier AF = FB, D′F′ = F′E′. Zieht man diese beiden Gleichungen von der Gleichung des halben Kreisumfangs FAF′ = FBF′, ab, so kommt AD′ = BE′.

Dieselbe Eigenschaft hat auch noch für eine Tangente TG und eine ihr parallele Sehne AB statt. Denn verbindet man den Mittelpunkt C mit dem Berührungspunkt F durch einen Halbmesser, so steht dieser Halbmesser auf der Tangente und auf der Sehne senkrecht: folglich AF = FB.

§. 49. Zwei Kreislinien C und C′ (Fig. 56), welche durch einen und denselben Punkt der ihre Mittelpunkte verbindenden Geraden (Centrallinie) gehen, können sich in keinem andern Punkte begegnen. Denn verbindet man einen beliebigen Punkt H der einen Kreislinie mit den Mittelpunkten C und C′, so haben wir immer CC′ oder CA + AC′ < CH + HC′; folglich, wenn man auf beiden Seiten die gleichen Stücke CA

und CH wegläßt, $AC' < HC'$: der Punkt H liegt also in jedem Falle ausserhalb des Kreises C'.

Wenn die Mittelpunkte beide auf einerlei Seite des gemeinschaftlichen Punktes A, wie in C und C'' liegen, so hat man CH oder $CA < CC'' + C''H$; mithin, wenn man CC'' beiderseits abzieht, $C''A < C''H$; der Punkt H liegt also ausserhalb des Kreises C''. Die in dem Berührungspunkt A über der Linie CC' errichtete Senkrechte AT wird die drei Kreise C, C', C'' zugleich berühren.

Haben aber zwei Kreislinien einen Punkt M gemein (Fig. 57), der ausserhalb der Centrallinie liegt, so müssen sie sich schneiden. Man ziehe MN senkrecht auf CC' und mache $IN = IM$. Die gleichen schiefen Linien CM, CN beweisen, daß der Punkt N auf dem Kreisumfange C liegt. Zu gleicher Zeit befindet sich dieser Punkt auf dem Kreisumfange C', weil $C'M = C'N$. Die Peripherien haben also einen zweiten Punkt N mit einander gemein. Ein dritter gemeinschaftlicher Punkt ist unmöglich (§. 44).

Hieraus ergibt sich:

1) Haben zwei Kreislinien nur einen Punkt gemein, so liegt derselbe auf der Centrallinie, und umgekehrt. Ueberdies ist die Entfernung der Mittelpunkte gleich der Summe oder Differenz der Radien. Denn man hat (Fig. 56) $CC' = CA + C'A$, oder $CC'' = CA - C''A$, je nachdem sich die Kreise von aussen oder von innen berühren.

2) Schneiden zwei Kreislinien einander, so steht die Centrallinie auf ihrer gemeinschaftlichen Sehne senkrecht. Ausserdem ist der Abstand der Mittelpunkte kleiner als die Summe der Halbmesser und größer als ihre Differenz. Denn man hat (Fig. 57) $CC' < CM + C'M$ und $CC' + C'M > CM$ oder $CC' > CM - C'M$.

3) Haben zwei Kreislinien keinen Punkt gemein, so ist der Abstand der Mittelpunkte kleiner als der Unterschied der Radien, oder größer als ihre Summe, je nachdem einer der Kreise in dem andern liegt oder nicht. Denn man hat (Fig. 58) $CD = DO - CA - AO$, und $CC' = CA + C'B + AB$. Hieraus schließen wir, wenn D die Entfernung der beiden Mittelpunkte und, R, r die Halbmesser beider Kreise bezeichnen, daß die Peripherien sich schneiden,

wann		$D<R+r$ und $D>R-r$;
daß sie einander berühren	von aussen, wann . . .	$D=R+r$
	von innen, wann . . .	$D=R-r$;
daß sie keinen Punkt gemein haben,	die beiden Kreise ganz auseinander liegen, wann	$D>R+r$
	ein Kreis in dem andern liegt, wann	$D<R-r$.

§. 50. Die hierher gehörigen umgekehrten Sätze finden gleichfalls statt. Hat man z. B. gleichzeitig $D<R+r$ und $>R-r$, so schneiden sich die beiden Kreislinien. Denn würden sie sich berühren, so wäre $D=R+r$, oder $=R-r$. Würden sie einander nicht schneiden, so wäre $D>R+r$, oder $<R-r$.

Hat man ferner $D=R+r$, so findet eine Berührung von aussen statt. Denn wäre dies nicht der Fall, so müßte eine von den andern vier Lagen zuläßig sein. Würden die Peripherien sich nun schneiden, so wäre $D<R+r$, was der Annahme widerspricht. Fände dagegen eine Berührung von innen statt, so wäre $D=R-r$, was nicht sein kann, da $D=R+r$, u. s. w.

Anmerkung. Ueberhaupt hat man alle möglichen Fälle eines Systems in Voraussicht genommen und dabei gefunden, daß ein Jeder von ihnen Bedingungen mit sich bringt, die nicht mit denjenigen, welche die übrigen Fälle darbieten, gleichzeitig bestehen können: so finden die zugehörigen umgekehrten Sätze statt, deren Beweise dann, wie hier geschehen, geführt werden. Bei der Theorie der schiefen und parallelen Linien konnte diese Bemerkung schon gemacht werden.

§. 51. Wenn man die Lage der Mittelpunkte und die Größe der Radien zweier Kreise kennt, so ist es also nicht gerade nothwendig, die Peripherien derselben zu beschreiben, um sich zu vergewissern, ob sie einander berühren, schneiden, oder solches nicht thun. Es ist hinreichend, die Radien zu addiren und zu subtrahiren, und die Resultate mit dem Abstande der Mittelpunkte zu vergleichen, um entscheiden zu können, zu welchen der fünf möglichen Fälle die vorliegende Figur gehöre.

§. 52. Einen Kreis zu beschreiben, welcher einen andern gegebenen Kreis C′ (Fig. 55) im Punkte A berührt und durch einen

zweiten gegebenen Punkt B geht. Man ziehe die Tangente AT; dadurch wird die Aufgabe auf die des §. 47 zurückgeführt.

Anmerkung. Befände sich der gegebene Punkt B innerhalb des Kreises C, so würde der gesuchte Kreis von dem gegebenen eingeschlossen sein.

Von den Dreiecken und dem Verhalten der Winkel im Kreise.

§. 53. **Die Summe der drei Winkel eines Dreiecks beträgt immer zwei Rechte** (Fig. 59). Wenn man eine Seite AC irgend eines Dreiecks ABC verlängert, und CF zu AB parallel zieht, so werden die drei um den Punkt C liegenden Winkel beziehungsweise denen des Dreiecks gleich sein. Denn die Winkel FCD und A sind als korrespondirende gleich. Ferner sind die Winkel BCF und B als innere Wechselwinkel gleich. Durch Addition erhält man FCD + BCF oder BCD = A + B. **Der äussere Winkel BCD eines Dreiecks ist daher allemal den beiden innern gegenüberstehenden Winkeln A und B zusammengenommen gleich.** Man vergleiche hiermit den §. 14. Man hat also A + B + C = 2 R.

Macht man (Fig. 60) den Winkel MON = A, MOL = B, LOK = C, so liegt OK in der Verlängerung von NO. Diese Construction lehrt uns aus zwei gegebenen Winkeln eines Dreiecks den dritten kennen.

Aus dem vorstehenden Lehrsatze folgern wir:

1) Wenn zwei Winkel eines Dreiecks einzeln genommen zweien eines andern Dreiecks gleich sind, so ist auch der dritte Winkel des einen Dreiecks gleich dem dritten des andern.

2) Ein Dreieck kann lauter spitze Winkel haben; es kann aber nur einen rechten oder stumpfen Winkel haben (§. 14).

3) In einem rechtwinkligen Dreieck ABC (Fig. 61) ist der eine spitze Winkel das Complement des andern, B + C = R.

4) Wenn sich die Linie BC um den Punkt B dreht, um sich von der Senkrechten BA zu entfernen, und die Lage von BC′ annimmt, so wird der Winkel ABC größer und der Winkel C kleiner, die Summe dieser spitzen Winkel bleibt jedoch fortwährend = R.

5) Im gleichseitigen Dreieck, welches allemal auch gleichwinklig ist, beträgt ein jeder Winkel zwei Drittel eines Rechten.

6) Im gleichschenkligen Dreieck ABC (Fig. 15) hat man A = B

und $A + B + C = 2\,R$; woraus $2\,A + C = 2\,R$, $A = R - \frac{1}{2}C$, $C = 2\,(R - A)$; man braucht also nur einen einzigen Winkel eines solchen Dreiecks zu kennen, um die beiden übrigen zu finden.

7) Zwei Winkel, deren Schenkel gegenseitig auf einander senkrecht stehen, sind einander gleich, wenn sie gleichartig sind, wie BAC und B′A′C′, sie sind Supplementwinkel zu einander, wenn sie ungleichartig sind, wie BAC und C′A′O (Fig. 62). Denn verlängert man A′B′ und A′C′ bis D und D′, daß sie die auf ihnen senkrechten Linien AB und AC schneiden, so sind die Winkel A und A′ in den rechtwinkligen Dreiecken AFD und A′FD′, als Complementwinkel der gleichen Winkel bei F, einander gleich.

8) Wenn zwei gerade Linien AB und BC (Fig. 63) in einem entfernten oder unzugänglichen Punkte B zusammenlaufen, so kann man diesen Winkel B, ohne ihn unmittelbar selbst zu messen, dadurch finden, daß man entweder DE parallel zu BC zieht, was $B = ADE$ gibt; oder daß man eine beliebige Gerade AC zieht, die Winkel A und C dann mißt und das Supplement von ihrer Summe $A + C$ nimmt, wie hier oben geschehen.

§. 54. Ein Dreieck ist völlig bestimmt:

1) Durch zwei Seiten m und n und den von ihnen eingeschlossenen Winkel K (Fig. 18). Man mache zuvörderst den Winkel $A = K$; nehme dann auf den unbegrenzten Schenkeln AG und AH dieses Winkels A die Entfernungen AC und AB bezüglich gleich m und n; verbinde endlich die Endpunkte B und C durch eine gerade Linie.

2) Durch eine Seite n und die beiden ihr anliegenden Winkel k und l. Auf einem der unbegrenzten Schenkel des Winkels $a = k$ nehme man $ab = n$, und ziehe bc, so daß der Winkel $b = l$ wird; das verlangte Dreieck ist abc.

3) Durch eine Seite n, einen ihr anliegenden Winkel k und einen gegenüberliegenden Winkel i. Man suche zuvörderst den dritten der Seite n anliegenden Winkel (§. 53); man erhält so den vorigen Fall.

4) Durch die drei Seiten m, n, p (Fig. 57). Man nehme $CC' = m$, beschreibe aus C, C′ als Mittelpunkten mit den Halbmessern $CM = n$, $C'M = p$ zwei Kreise. Die Durchschnittspunkte M, N werden die zwei gleichen Dreiecke CMC′, CNC′, die der Aufgabe

ein Genüge thun, bestimmen. Die beiden Kreise werden einander nur schneiden, wenn $m > n - p$ und $< n + p$. Ohne diese zweifache Bedingung ist das Dreieck nicht möglich (§. 50).

Anmerkung. Diese beiden Bedingungen lassen sich unter der allgemeinen Bedingung zusammenfassen, daß die Summe irgend zweier Seiten eines Dreiecks immer größer als die dritte sein muß.

§. 55. **Ein Dreieck zu construiren, von dem man zwei Seiten a, c und den der erstern gegenüberstehenden Winkel K kennt** (Fig. 64). Man mache den Winkel $BCA = K$; nehme auf einem der unbegrenzten Schenkeln $CB =$ der gegebenen anliegenden Seite a. Um das Dreieck zu schließen, wird die gegenüberstehende Seite c die Lage wie AB erhalten. Beschreibt man daher aus B als Mittelpunkt mit dem Halbmesser $BA = c$ einen Kreis AA', so werden die Durchschnittspunkte A, A′ dieses Kreises mit der Seite AC die Dreiecke ABC, A′BC bestimmen, welche beide die gegebenen Bedingungen erfüllen. Im Allgemeinen hat man hiernach zwei Auflösungen ABC, A′BC; es sind dabei aber fünf Fälle zu unterscheiden:

1) Wenn der Radius c des Kreises kleiner als die Senkrechte BD ist, so schneidet der Kreis die Linie AC nicht; die Aufgabe ist alsdann unmöglich.

2) Wenn der Radius c dem Perpendikel BD gleich ist, so berührt der Kreis die Linie AC im Punkte D; das rechtwinklige Dreieck CBD genügt hier allein der Aufgabe. Ein rechtwinkliges Dreieck ist also durch zwei seiner Seiten bestimmt, oder zwei rechtwinklige Dreiecke sind gleich, wenn sie die Hypothenuse und eine Kathete gegenseitig gleich haben.

3) Wenn der Radius $c > BD$ und $< CB = a$ ist, so sind die gleichen schiefen Linien BA und $BA' < BC$, folglich auf einerlei Seite von BC liegend (§. 30). Die Dreiecke ABC, A′BC entsprechen beide den Bedingungen der Aufgabe, sie geben also die Auflösungen derselben ab. Uebrigens ist A der Supplementwinkel von CA′B, weil das gleichschenklige Dreieck ABA′ den Winkel $A =$ BA′A hat. Das eine der genannten Dreiecke ist folglich spitzwinklig und das andere stumpfwinklig. Sollte man aber im voraus wissen, daß das gesuchte

Dreieck einen oder keinen stumpfen Winkel habe, so ist eine Auflösung ausgeschlossen.

4) Wenn $c > a$ oder $BA > BC$, so fallen die Punkte A und A′ zu beiden Seiten von BC (Fig. 65). Man hat dann nur eine Auflösung ABC.

5) Wir haben bis hierher vorausgesetzt, daß der gegebene Winkel $K = A$ spitz sei. Wäre er stumpf, wie BA′C (Fig. 64), so würde die obige Construktion nur eine einzige Auflösung A′BC geben, weil das Dreieck ABC der Aufgabe nicht entsprechen kann. Zu bemerken ist hierbei, daß die dem stumpfen Winkel C gegenüberstehende Seite c die größere sein muß. Hätte man $c < a$, so wäre die Aufgabe ungereimt.

Zwei Dreiecke, welche zwei Seiten einzeln genommen, und den einen dieser Seiten gegenüberstehenden Winkel gleich haben, sind folglich einander gleich, wenn sie von einerlei Art sind (beide rechtwinklig, oder spitzwinklig, oder stumpfwinklig).

Anmerkung. Faßt man sämmtliche Fälle über die Gleichheit (Congruenz) der Dreiecke zusammen, so kann man sagen: zwei Dreiecke sind einander gleich, wenn sie drei ihrer Stücke gegenseitig gleich haben. Dabei muß man aber erstens den Fall ausschließen, wo die drei gegebenen Stücke Winkel sind; zweitens voraussetzen, wenn zwei Winkel unter den gegebenen Stücken sich befinden, daß solche in Bezug auf die bekannte Seite übereinstimmig liegen; drittens annehmen, wenn zwei Seiten und ein ihnen gegenüberstehender Winkel wechselseitig gleich sind, daß die Dreiecke von gleicher Art sind.

§. 56. Gleiche Sehnen CD, AB (Fig. 66) stehen in demselben Kreise gleich weit vom Mittelpunkte O ab, und umgekehrt. Man ziehe die Senkrechten OI, OK und die Halbmesser CO und OA. Die rechtwinkligen Dreiecke OCI und AOK sind gleich, weil CI und OK die Hälfte gleicher Sehnen sind; folglich $OI = OK$.

Hat man $OI = OK$, so sind die Dreiecke abermals gleich; woraus $CD = AB$.

§. 57. Die kleinere Sehne CD (Fig. 67) ist weiter vom Mittelpunkt O entfernt als die größere AB und

umgekehrt. Da Bogen AEB > CFD (§. 26), so kann man AE = CD nehmen; woraus AE = CD, folglich OL = OI. Da AE unterhalb AB liegt, so ist OI > OG, mithin auch > OK.

Ist OL > OK, so ist auch die Sehne CD < AB. Denn hätte man CD = oder > AB, so würde nach dem Vorhergehenden OL = oder < OK sein. (Siehe Anmerkung zu §. 50.)

§. 58. Das Maß der Winkel, die ihren Scheitel im Centrum haben, ist uns bekannt. Wir wollen nun das Maß für eine beliebige Lage des Scheitels suchen, und vorerst den Fall betrachten, wo der Winkel durch zwei Sehnen gebildet wird und sein Scheitel in der Peripherie liegt. Ein solcher Winkel heißt ein Peripheriewinkel, während man denjenigen Winkel, dessen Scheitel im Mittelpunkt des Kreises sich befindet, einen Centriwinkel nennt.

Der Peripheriewinkel hat zum Maße die Hälfte des zwischen seinen Schenkeln befindlichen Bogens.

1) Der eine Schenkel AD des Winkels GAD (Fig. 70) gehe durch den Mittelpunkt C. Wenn man den Durchmesser EF zu AG parallel zieht, so hat man EG = FA (§. 48). Nun ist aber ED = AF, weil die Winkel ACF und DCE gleich sind; E ist daher die Mitte des Bogens DG. Der Winkel ECD oder GAD hat also ED oder die Hälfte des Bogens GD zum Maß.

2) Der Mittelpunkt liege zwischen den Schenkeln des Winkels BAG. Zieht man den Durchmesser AD, so entstehen die Winkel BAD und DAG, welche die Hälften der Bogen BD und DG zum Maß haben, deren Summe die Hälfte des Bogens BDG ist. Der Winkel BAG hat also zu seinem Maß die Hälfte des zwischen seinen Schenkeln liegenden Bogens BDG.

3) Der Mittelpunkt liege nicht zwischen den Schenkeln des Winkels HAB. Die einzelnen Maße der Winkel HAD und BAD sind die Hälften der Bogen HD und DB, deren Unterschied die Hälfte des Bogens HB ist. Der Winkel HAB hat also zum Maß die Hälfte des zwischen seinen Schenkeln liegenden Bogens.

4) Der Winkel FAB wird durch eine Tangente AT und eine Sehne AB gebildet. Da der Winkel der Tangente mit dem darauf senkrechten Durchmesser AD ein rechter ist, so hat der Winkel TAD zu seinem Maß den Quadranten oder die Hälfte des halben Umkreises AHBD. Das Maß des Winkels BAD ist die Hälfte des Bogens BD.

Der Winkel TAB hat also zu seinem Maß den Unterschied der Hälfte von AHBD und von BD, oder die Hälfte von AHB.

5) Hat umgekehrt ein Winkel BAG zum Maß die Hälfte des zwischen seinen Schenkeln liegenden Bogens BG, so liegt sein Scheitel in der Peripherie. Denn könnte $\frac{1}{2}$ BG das Maß des Winkels BIG sein, so würde BAG mit BIG einerlei Maß haben, mithin Winkel BIG = BAG sein, was unmöglich ist (§. 18).

6) Der von einer Sehne AG und der Verlängerung AK der Sehne AH gebildete Winkel KAG hat zu seinem Maß die Hälfte der Summe des Bogens AH und AG. Denn der Winkel KAG ist der Supplementwinkel von dem Winkel HAG, der die Hälfte des Bogens GDH zum Maße hat. Leicht wird die Wahrheit nachstehender Lehrsätze erkannt:

7) Der Winkel BAD (Fig. 71), dessen Scheitel A im Umkreise liegt, und dessen Schenkel durch die Endpunkte des Durchmesser D und B gehen, ist ein rechter; denn er hat zu seinem Maß die Hälfte des halben Umkreises.

8) Alle Winkel A, C, D... (Fig. 72), welche ihre Scheitel im Umkreise haben, und auf einerlei Bogen BE stehen, sind einander gleich.

9) Bewegt sich ein der Größe nach unveränderlicher Winkel dergestalt, daß seine Schenkel fortwährend, der eine durch B, der andere durch E gehen, so wird der Scheitel nach und nach die Lagen A, C, D.... annehmen und die Peripherie beschreiben.

10) Der Peripheriewinkel, dessen zwischen seinen Schenkeln abgeschnittener Bogen die halbe Peripherie übertrifft, ist ein stumpfer; der auf einem kleinen Bogen stehende Peripheriewinkel ist ein spitzer.

§. 59. Der Winkel BAC, dessen Scheitel irgendwo in der Ebene des Kreises liegt (Fig. 79 und 80), hat zu seinem Maß die halbe Summe oder Differenz der zwischen seinen Schenkeln liegenden Bogen BC, DE, je nachdem der Scheitel sich ausserhalb oder innerhalb des Kreises befindet.

Erster Fall. Zieht man EF parallel zu DC, so wird der dem Winkel BAC gleiche Winkel E gebildet, dessen Maß die Hälfte des zwischen seinen Schenkeln liegenden Bogens ist, d. h. $\frac{1}{2}$ BF = $\frac{1}{2}$ (BC+CF) = $\frac{1}{2}$ (CB + DE).

Zweiter Fall. Man ziehe wie vorhin EF parallel zu DC. Das Maß des Winkels A = BEF ist alsdann $\frac{1}{2}$BF = $\frac{1}{2}$(CB — CF) = $\frac{1}{2}$(CB — ED).

Setzt man a = BC und b = DE, so wird das Maß des Winkels A durch $\frac{1}{2}$(a $\pm$ b) ausgedrückt. Diese Formel ist ganz allgemein; denn b = o entspricht dem Fall, wo der Scheitel auf der Peripherie und b = a dem Fall, wo der Scheitel im Centrum liegt.

§. 60. Wir wollen nun zur Auflösung verschiedener Aufgaben schreiten.

I. In ein gegebenes Dreieck ABC (Fig. 68) einen Kreis einzuschreiben, d. h. innerhalb dieses Dreiecks einen Kreis zu beschreiben, der die drei Seiten desselben berührt. Diese Aufgabe läuft darauf hinaus, innerhalb des Dreiecks ABC einen Punkt O zu finden, der in gleicher Entfernung von seinen drei Seiten sei. Denn sind die Senkrechten OE, OD, OF einander gleich, so wird der aus O als Mittelpunkt mit dem Halbmesser OE beschriebene Kreis die drei Seiten berühren. Suchen wir also zuvörderst einen Punkt o, der in gleicher Entfernung von den beiden Seiten AC, AB stehe. Ziehen wir Ao, so geben die gleichen Perpendikel oe, of die gleichen rechtwinkligen Dreiecke Aeo, Aof (§. 55). Ao theilt folglich den Winkel A in zwei gleiche Theile.

Umgekehrt, halbirt Ao den Winkel A, so werden für jeden Punkt dieser Linie die beiden Perpendikel oe, of gleich sein. Alle Punkte der Linie AO sind demnach sowohl von AB als von AC gleich weit entfernt, und die Punkte dieser Linie besitzen allein eine solche Eigenschaft. Auf der Geraden AO werden also die Mittelpunkte sämmtlicher Kreise liegen, welche diese beiden Seiten berühren; der Mittelpunkt unsers gesuchten Kreises ist daher ein Punkt der Linie AO. Aus demselben Grunde wird dieser Mittelpunkt sich auf der den Winkel B halbirenden Linie OB befinden; er liegt also im Punkte O, wo die beiden gedachten Halbirungslinien einander schneiden. Der Durchschnitt O liegt nicht nur gleich weit von den drei Seiten des Dreiecks entfernt, sondern er besitzt auch diese Eigenschaft allein. Ziehen wir die Gerade OC, so theilt dieselbe den Winkel in zwei gleiche Theile, weil in den rechtwinkligen Dreiecken ECO und DCO die Hypothenuse gemein ist und die Seiten OD und EO gleich sind.

Hieraus entnehmen wir nachstehende Folgerungen:

1) In jedes Dreieck kann man einen Kreis einschreiben.

2) In ein Dreieck kann man nur einen Kreis einschreiben.

3) Der Durchschnittspunkt der Halbirungslinien irgend zweier Winkel des Dreiecks ist der Mittelpunkt dieses Kreises.

4) Die Verbindungslinie jenes Mittelpunktes mit dem Scheitel des dritten Winkels theilt auch diesen Winkel in zwei gleiche Theile.

Es sei p der Umfang des Dreiecks. Da AE = AF, BF = BD, CE = CD, so kommt p = 2AF + 2BD + 2CD, oder p = 2AF + 2BC; woraus AF = $\frac{1}{2}$ p — BC = AE = $\frac{1}{2}$ (AB + AC — BC). Hiernach kann man leicht die Punkte F und E, mithin auch den Punkt D, weil CE = CD, finden. Die Aufgabe läßt sich nun gleichfalls dadurch auflösen, daß man durch die drei Punkte E, D, F einen Kreis legt.

II. Einen Kreis zu beschreiben (Fig. 52) der zwei gegebene Linien AB = m, AD = n als Sehnen in sich aufnimmt, so daß von den dazu gehörigen Bogen der eine das Doppelte des andern ist. Da das Dreieck ADB gleichschenklig sein soll, so wird man aus den Punkten A und B der Linie AB = m mit einem Radius = n Kreisbogen beschreiben, die durch ihren Durchschnittspunkt D das Dreieck ABD bestimmen, um das jetzt ein Kreis zu legen ist.

III. Ein rechtwinkliges Dreieck BAC (Fig. 69) zu construiren, dessen eine Kathete AB und der Umfang BE gegeben sind. Da BC + CA = AE ist, so errichte man in A die Senkrechte AD = AE; alsdann DC = BC, das Dreieck BCD demnach gleichschenklig. Die durch die Mitte I von BD gezogene Senkrechte I bestimmt den Punkt C.

IV. Durch einen gegebenen Punkt I (Fig. 59) eine Linie AIB innerhalb des gegebenen Winkels BCA zu ziehen, so daß das gleichschenklige Dreieck ABC entstehe, nämlich BC = AC, und Winkel A = B werde. Da der äussere Winkel BCD = A + B = 2A ist, so wird, wenn man die den Winkel BCD halbirende CF zieht, FCD = A und CF parallel zu AB sein. Man halbire also den Winkel BCD und ziehe durch den Punkt I die Gerade AB zur Halbirungslinie CF parallel.

V. Durch einen gegebenen Punkt M (Fig. 66) eine Linie CD zu ziehen, so daß das zwischen den concentrischen Kreisperipherien DB, db enthaltene Stück Dd dieser Linie von bekannter Länge l sei. Wenn CD die gesuchte Linie wäre, so müßte jede Sehne AB = CD in gleicher Entfernung vom Mittelpunkt liegen, oder KO = OI, KB = ID, Kb = Id, Bb = Dd = l sein. Trägt man demnach von einem belie-

bigen Punkte B aus zwischen die beiden Kreisperipherien die Länge l von B nach b, verlängert dann die Linie bB bis A und beschreibt endlich den die Linie Ab berührenden Kreis OIK, so wird derselbe die gesuchte Linie CD gleichfalls berühren. Es ist also nur nöthig, durch den Punkt M an den Kreis IK eine Tangente CD zu legen, um die verlangte Gerade zu erhalten.

VI. Die Hypothenuse BC eines rechtwinkligen Dreiecks BCD, so wie die Summe oder Differenz der Katheten CD, BD (Fig. 64) desselben sind gegeben; man soll das Dreieck construiren. Es sei AD = BD = DA′. In den rechtwinkligen gleichschenkligen Dreiecken BAD, BA′D sind die Winkel A und A′ gleich einem halben Rechten (§. 53). In dem Dreiecke BAC oder BA′C ist folglich die Seite BC, der Winkel A oder A′ und die Seite AC oder A′C bekannt; man kann daher leicht dasselbe verzeichnen. An die Basis AC oder A′C legt man AB oder A′B unter einem halben rechten Winkel an; beschreibt dann aus C als Mittelpunkt mit CB als Radius einen Kreis, der die Linie AB oder A′B im Scheitel B schneiden wird. [Im Allgemeinen gibt es zwei Durchschnittspunkte, mithin zwei Auflösungen (§. 56).] Es bleibt nur noch übrig den Perpendikel BD zu fällen, um das verlangte Dreieck BCD zu erhalten.

VII. Aus dem Endpunkte A einer Linie AB (Fig. 71) eine Senkrechte auf derselben zu errichten, ohne sie erst zu verlängern. Da der Winkel A ein rechter sein soll, so wird jede Linie AD der Durchmesser eines durch A gehenden Kreises sein. Aus einem beliebigen ausserhalb der AB liegenden Punkte C als Mittelpunkt, beschreibt man demnach mit einem der AC gleichen Halbmesser einen Kreis. Durch den Punkt B, in welchem der Kreis die Linie AB trifft, zieht man den Durchmesser BCD, welcher auf dem Umkreise den Punkt D bestimmen wird. Die Gerade AD, die diesen Punkt D mit dem Endpunkte A verbindet, wird die verlangte Senkrechte sein.

VIII. Von einem ausserhalb eines Kreises gegebenen Punkte D (Fig. 73) an diesen Kreis eine Tangente AD zu legen. Da der durch die Tangente und den Radius gebildete Winkel ein rechter ist, so wird dieser Winkel ein Peripheriewinkel des Kreises sein, welcher CD zum Durchmesser hat. Man verbinde also den Punkt D mit dem Mittelpunkt C des gegebenen Kreises, und beschreibe über dieser Linie als Durchmesser einen Kreis; er wird den gegebenen Kreis im Berührungspunkt A schneiden. Ausser der Tangente AD werden wir in der

Tangente BD eine zweite Auflösung haben; beide Linien werden allein der Aufgabe genügen.

Anmerkung. Es erhellet zugleich, daß die beiden Tangenten BD und DA einander gleich sind. — Durch einen innerhalb eines Kreises gegebenen Punkt an diesen Kreis eine Tangente zu legen, ist unmöglich.

IX. Durch einen gegebenen Punkt M oder d innerhalb oder ausserhalb eines gegebenen Kreises (Fig. 66) eine Sehne CD von bestimmter Länge in den Kreis zu legen. Man trage an einer beliebigen Stelle die Sehne AB von der gegebenen Länge in den Kreis; fälle aus dem Mittelpunkte O die Senkrechte OK darauf, und beschreibe mit dieser den Kreis KI. Die durch den Punkt M an diesen Kreis gelegte Tangente wird die gesuchte Sehne sein. Die Aufgabe läßt ebenfalls zwei Auflösungen zu.

Anmerkung. Die Aufgabe ist unmöglich, wenn die gegebene Länge größer als der Durchmesser ist. Liegt der Punkt M innerhalb des Kreises, so ist die Aufgabe ebenfalls unmöglich, wenn die gegebene Länge kleiner als die kleinste durch M gehende Sehne ist.

X. Einen gegebenen Winkel ACB in drei gleiche Theile zu theilen (Fig. 74). Man beschreibe aus dem Scheitel C als Mittelpunkt den Kreis IFAB, und nehme die Linie AO dergestalt gezogen an, daß Winkel $O = \frac{1}{3}$ ACB. Da der Winkel ACB ein äusserer Winkel des Dreiecks AOC ist, so hat man $3O = O + OAC$, oder $2O = OAC$. Zieht man nun den Radius CF, so gibt das gleichschenklige Dreieck FAC Winkel $OAC = AFC$. Der äussere Winkel AFC des Dreiecks OFC ist aber $= O + FCO = OAC = 2O$; woraus folgt, daß Winkel $FCO = O$, mithin das Dreieck FCO gleichschenklig, und OF gleich dem Radius CF des Kreises ist. — Die Aufgabe kommt also darauf hinaus, eine Gerade AO dergestalt zu ziehen, daß der ausserhalb des Kreises liegende Theil OF dieser Linie gleich dem Radius sei. Der Winkel O wird dann das Drittel des Winkels ACB, und der Bogen BG oder FI das Drittel des Bogens AB betragen. Die durch die Elementargeometrie dargebotenen Mittel, in der nur die Eigenschaften der geraden Linie und des Kreises betrachtet werden, mithin der Gebrauch des Lineals und Zirkels nur gestattet wird, reichen aber nicht aus, die Linie AO auf die verlangte Weise zu ziehen. Durch

eine Art von Probiren läßt sich hier blos ein Winkel in drei gleiche Theile theilen; um eine solche Theilung zu bewerkstelligen, werden wir in der Folge Mittel kennen lernen.

XI. Ueber einer Geraden BE (Fig. 75) einen Kreis dergestalt zu beschreiben, daß alle auf einerlei Seite derselben liegenden Peripheriewinkel O, deren Schenkel durch die Endpunkte B und E dieser Linie gehen, einem gegebenen Winkel A gleich sind. Man drückt diese Aufgabe auch so aus: Ueber einer Geraden BE ein Segment zu construiren, welches einen gegebenen Winkel faßt. Die durch E gehende Tangente wird mit der Sehne BE einen Winkel BEK, der $= A = O$ ist, bilden (§. 59). Legt man demnach durch E die Gerade KEI dergestalt, daß der Winkel BEK $= A$ sei, so wird sie eine Tangente abgeben. Die Aufgabe wird also darauf zurückgeführt, einen Kreis zu beschreiben, der durch den Punkt B geht und KI im Punkte E berührt. Errichtet man folglich über der Geraden KI die Senkrechte CE, desgleichen über der Mitte der Geraden BE die Senkrechte GC, so wird der Mittelpunkt des verlangten Kreises in C liegen, wo diese beiden Senkrechten einander schneiden.

Die vorliegende Construction wird öfters angewendet, namentlich wenn ein Dreieck verzeichnet werden soll, von dem unter Anderem eine Seite nebst dem gegenüberstehenden Winkel, wie in den folgenden Aufgaben, bekannt sind.

XII. Zur Verzeichnung eines Dreiecks BDE (Fig. 76) ist gegeben: die Basis b, die Höhe h und der der Basis gegenüber liegende Winkel A. In der Entfernung HG $=$ h ziehe man die Linien DD′ parallel zu BE $=$ b; beschreibe dann über BE ein Segment, das den gegebenen Winkel A enthält. Die Durchschnittspunkte des Kreises mit der Linie DD′ werden die verlangten Dreiecke BDE, BD′E als Auflösungen geben.

XIII. Drei Punkte B, A, C (Fig. 77) sind auf einer Karte eingetragen, die Lage eines vierten Punktes D in Beziehung zu jenen Punkten aus den bekannten Winkeln BDC und BDA zu bestimmen. Man beschreibe über BC den Kreisabschnitt miB, welcher den Winkel BDC enthält; der gesuchte Punkt D wird auf der Peripherie mni liegen, weil sie der geometrische Ort der Scheitel sämmtlicher zu BDC gleichen Winkel ist. Ebenso wird der Punkt D auf dem über BA construirten Kreisabschnitt pqA, welcher den Winkel BDA enthält, sich befinden; er liegt also im Durchschnitte gedachter Kreisbogen.

Wenn einer der Kreise zugleich durch die drei gegebenen Punkte A, B, C geht, so ist die Aufgabe unbestimmt oder ungereimt, je nachdem sich der zweite Kreis in dem nämlichen Falle befindet oder nicht.

Anmerkung. Diese in der Praxis vorkommende Aufgabe heißt die Potenotsche. Die Summe der beobachteten Winkel BDC und DBA gibt jederzeit zu erkennen, ob der Punkt D ausserhalb oder innerhalb des Dreiecks ABC liegt. Im ersten Falle ist dieselbe kleiner, im zweiten größer als zwei Rechte. Macht sie gerade zwei Rechte, so befindet sich der Punkt D in der Linie CA selbst.

XIV. Zur Verzeichnung eines Dreiecks ABC (Fig. 68) ist gegeben: die Basis AB, der ihr gegenüber liegende Winkel C und der Radius OF des demselben eingeschriebenen Kreises. Da AO und OB die Winkel A und B des gesuchten Dreiecks in zwei gleiche Theile theilen, so wird im Dreieck AOB der Winkel O, Supplement von OAF + OBF, oder von $\frac{1}{2}(A+B)$, oder gleich $2R - \frac{1}{2}(A+B)$ sein. Hieraus $O = R + \frac{1}{2}C$, weil $A + B = 2R - C$. Der Winkel O wäre hiernach bestimmt; der Punkt O läßt sich alsdann mittelst der Aufgabe XII finden. Beschreibt man endlich den Kreis EDF, der die Seite AB in F berührt, so werden die an denselben gelegten Tangenten AE, BD das verlangte Dreieck vollenden.

XV. Ein Dreieck A′B′C′ (Fig. 78) und zwei concentrische Kreise AO, CO sind gegeben; man soll ein Dreieck ABC construiren, das zwei seiner Scheitel in A und B auf der Peripherie des größern Kreises und den dritten Scheitel in C auf der Peripherie des kleinern Kreises liegen hat, und überdies zu dem gegebenen Dreieck gleichwinklig ist, $A = A'$, $B = B'$, $C = C'$.

Der Winkel A hat zu seinem Maß die Hälfte des Bogens BD; beschreibt man daher aus A′ als Mittelpunkt mit AO den Bogen HI, so wird derselbe die Hälfte von dem Bogen BD sein. An einer beliebigen Stelle des größern Kreises nimmt man folglich $BD = 2HI$; die Seiten AB und AC werden durch die Punkte B und D gehen. Ueberdem ist der Winkel BCD der Supplementwinkel von C′; beschreibt man folglich über der Sehne BD einen Kreisabschnitt BCcD, der den Winkel $2R - C'$ faßt, so wird man den Ort des Scheitels C erhalten. Die Gerade DCA bestimmt den Punkt A und das gesuchte Dreieck ABC. — Der Punkt c liefert in dem Dreieck aBc eine zweite Auflösung der

Aufgabe. Da man der Sehne BD unendlich viele verschiedene Lagen beilegen kann, so wird man ebensoviel doppelte Auflösungen erhalten.

XVI. Von einem Dreieck sind gegeben: eine Seite a und die Höhen h und h′ auf die beiden übrigen Seiten; es soll das Dreieck verzeichnet werden. Ueber einer Linie, deren Länge = a, werde ein Halbkreis beschrieben; aus den Endpunkten B und C der Linie a werde dessen Peripherie durch die mit den Halbmessern h in h′ beschriebenen Kreisbogen in den Punkten D und E geschnitten. Zieht man dann die Linien CD und BE, so bestimmen beide in ihrem Durchschnittspunkt das verlangte Dreieck BCx.

Anmerkung. Es ist nützlich, daß man sich in dem Auflösen geometrischer Aufgaben übe; eine solche Uebung ist insbesondere demjenigen nöthig, welcher sich zum wissenschaftlichen Techniker ausbilden will. Wir glauben zu diesem Zweck folgende Werke anempfehlen zu können: Sammlung geometrischer Aufgaben von J. Salomon. Wien, bei Gerold. — Die Geometrie des Euclid, erläutert durch eine damit verbundene, systematisch geordnete Sammlung von geometrischen Aufgaben, von E. Unger. Erfurt, bei Keyser. — Sammlung geometrischer Aufgaben von W. Hertel. Leipzig, bei Baumgärtner. — Sammlung geometrischer Aufgaben von L. Woeckel. Nürnberg, bei Ebner.

Von der Proportionalität der Linien und den ähnlichen Dreiecken.

§. 61. Wenn man auf einer von zwei beliebigen geraden Linien AH, ah (Fig. 81) gleiche Stücke AB, BC, CD.... annimmt, und durch die Theilungspunkte Paralellen Aa, Bb, Cc.... Hh in einer willkührlichen Richtung bis an die andere Linie zieht, so werden die Theile ab, bc, cd.... dieser Linie zwischen den Parallelen ebenfalls einander gleich sein. Denn zieht man die Geraden ai, bk, cl.... zu AH parallel, so erhält man die gleichen Dreiecke aib, bhc, cbd.... weil ai = bk = cl.... = AB = BC.... Aus dem Vorhergehenden folgt, daß AB in AH ebenso enthalten ist, wie ab in ah u. s. w.; also $\frac{AE}{EH} = \frac{ae}{eh}$, oder AE : EH = ae : eh.

§. 62. Zwei Gerade AH und ah werden durch irgend drei Parallelen Aa, Ee, Hh (Fig. 82) jederzeit in proportionale Theile geschnitten, nämlich so, daß man hat $\frac{AE}{EH} = \frac{ae}{eh}$.

Erster Fall. AE und EH sind commensurabel. — Wenn man das gemeinschaftliche Maß auf AH trägt, so wird es eine genaue Anzahl mal in AE und EH enthalten sein. Man wird auf den obigen Fall dadurch zurückgeführt, daß man durch die Theilungspunkte Parallelen zu Aa legt, indem solche die Linie ah in gleiche Theile theilen.

Zweiter Fall. AE und EH sind incommensurabel. — Man theile AE in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, trage einen solchen von E nach H, wobei der Punkt I der nächst an H liegende Theilungspunkt sein mag; ziehe darauf Ii parallel zu Hh. Wegen der Commensurabilität von AE und EI hat man $\frac{EI}{EA} = \frac{ei}{ea}$. Da $EI = EH - HI$ und $ei = eh - hi$, so kann man statt der vorigen Gleichung folgende neue bilden, $\frac{EH}{EA} - \frac{HI}{EA} = \frac{eh}{ea} - \frac{hi}{ea}$. Die Linien HI und hi können so klein, als man nur will, genommen werden, indem man die Zahl der Theile von AE gehörig groß macht, wobei die übrigen Glieder unveränderlich bleiben; die Punkte H und h sind sonach die Grenzen von I und i. Da man nun beiderseits die zweiten Glieder auf jeden beliebigen Grad von Kleinheit bringen kann, so gibt uns das in der Algebra (§. 22) angeführte Fundamentalprinzip die Gleichung $\frac{EH}{EA} = \frac{eh}{ea}$. Aus dieser Gleichung oder Proportion folgt weiter $\frac{AE}{AH} = \frac{ae}{ah}$, desgleichen $\frac{AH}{ah} = \frac{AE}{ae} = \frac{EH}{eh}$.

§. 63. Wenn man in einem Dreieck HAC (Fig. 82) eine Gerade EB zu einer seiner Seiten HC parallel zieht, so werden die beiden andern Seiten durch diese Gerade in proportionale Theile geschnitten. Denn man hat $AB = ae$, $BC = eh$; woraus $\frac{AE}{AH} = \frac{AB}{AC} = \frac{EH}{BC}$.

Man kann das über die Figur 81 Gesagte an dem Dreieck HAC wiederholen.

Umgekehrt, wenn man $\frac{AE}{AB} = \frac{EH}{BC}$ hat, so ist EB zu HC parallel; denn wäre dies nicht der Fall, so könnte man HL zu EB parallel ziehen, was $\frac{AE}{AB} = \frac{EH}{BL}$ geben würde; folglich $BL = BC$.

§. 64. Aus dem Vorhergehenden ergibt sich:

1) Um zu drei gegebenen Linien m, n, p (Fig. 82) eine vierte Proportionale, d. h. eine Linie x zu finden, so daß $\frac{m}{n} = \frac{p}{x}$, macht man einen beliebigen Winkel HAC, und nimmt auf seinen Schenkeln $AE = m$, $AB = n$, $AH = p$. Zieht man dann die Linien EB und ihre Parallele HC, so wird man in AC die verlangte vierte Proportionallinie x haben.

2) Die Linien AB, AC, AD, AE.... (Fig. 83), welche von einem Punkte A auslaufen, werden von zwei Parallelen BF, fb proportional geschnitten. Betrachtet man blos die Linien AB und AC, so hat man $\frac{AB}{Ab} = \frac{AC}{Ac}$; ebenso geben die Geraden AC und AD die Gleichung $\frac{AC}{Ac} = \frac{AD}{Ad}$, u. s. w. Alle diese Verhältnisse sind einander gleich, weil das zweite einer jeden Gleichung das erste der nächstfolgenden ist; man hat daher $\frac{AB}{Ab} = \frac{AC}{Ac} = \frac{AD}{Ad} = \frac{AE}{Ae}$.....

3) Um eine gegebene Linie AF (Fig. 84) in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, z. B. in fünf, zu theilen, nimmt man irgend eine unbegrenzte Linie Fa an, auf welche man einen beliebigen Theil $Fe = ed = dc$.... fünfmal hinträgt. Man zieht endlich Aa und ihre Parallelen Bb, Cc, Dd...., wodurch $AB = BC = CD$....

4) Um eine gegebene Linie a'F (Fig. 85) nach eben dem Verhältnisse zu theilen, nach welchem eine andere gegebene Linie af getheilt ist, ziehe man eine beliebige Gerade FA, und trage auf sie der Reihe nach $FE = fe$, $ED = ed$, $DC = dc$.... Zieht man die Gerade Aa' und ihre Parallelen Bb', Cc',...., so wird man in e', d', c'... die gesuchten Theilungspunkte erhalten.

Stellt fa eine von den Dimensionen einer Figur dar, und will man, daß solche Dimension in Fa' übergehe, so muß man die Theile fe, fd.... beziehungsweise in Fe', F'd'.... umändern. War z. B. fa

der Maßstab zu einem Plan, so ist dieser Maßstab jetzt Fa'. Auf einer solchen Construction beruht das Verfahren, einen Riß auf einen gegebenen Maßstab zu reduciren.

§. 65. Zwei Dreiecke ABC, A'B'C' (Fig. 86) sind ähnlich, wenn die Winkel des einen einzeln den Winkeln des andern gleich und die homologen Seiten, d. i. diejenigen, welche gleichen Winkeln gegenüberstehen, proportional sind. Beide Bedingungen stehen in solchem Zusammenhang, daß die eine die andere nach sich zieht.

Wenn in zwei Dreiecken die Winkel des einen einzeln genommen denen des andern gleich sind, so sind die homologen Seiten proportional. Man lege das Dreieck A'B'C' dergestalt auf das Dreieck ABC, daß die Seite A'C' auf ihre homologe AC von A nach E falle, wegen der Gleichheit der Winkel A und A' wird A'B' auf AB von A nach D zu liegen kommen. Da AED = C' = C ist, so wird DE parallel zu BC sein, folglich $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$. Zieht man ferner EF zu AB parallel, so erhält man $\frac{AE}{AC} = \frac{BF}{BC}$. Weil BF = DE = B'C', so kommt $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$.

Umgekehrt haben zwei Dreiecke ihre Winkel gegenseitig gleich, wenn ihre homologen Seiten proportional sind. Es sei $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$. Nimmt man AD = A'B' und zieht DE parallel zu BC, so ist $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$. Da AD = A'B', so ist das erste Verhältniß in vorstehenden Gleichungen identisch, die übrigen Verhältnisse müssen es daher auch sein; folglich A'C' = AE, B'C' = DE. Die Dreiecke ADE, A'B'C' sind also gleich, mithin in den Dreiecken ABC, A'B'C' die Winkel gegenseitig gleich.

§. 66. Zwei Dreiecke ABC, A'B'C' (Fig. 86) sind ähnlich, wenn sie einen Winkel A = A' haben, und die diesen Winkel einschließenden Seiten proportional sind, d. i. $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}$. Legt man nämlich A'C' auf AC von A nach E, so wird A'B' in AD und A'B'C' in ADE zu liegen kommen. Der

Annahme zufolge wird dann $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$, mithin DE zu BC parallel sein; die Dreiecke ABC und ADE oder A′B′C′ haben also gegenseitig die Winkel gleich.

§. 67. Aus dem Vorhergehenden folgt:

1) Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn ihre Seiten paarweise parallel sind. Es ist dies offenbar bei den wie ABC und A′B′C′ liegenden Dreiecken (§. 38). Was die Dreiecke ABC und C′IH betrifft, so erhält man, wenn man die Seiten C′I und C′H nach A′ und B′ verlängert und A′B′ parallel zu HI oder AB zieht, Winkel I = A′, H = B′, als innere Wechselwinkel. Das Dreieck C′IH ist also dem Dreieck A′B′C′, mithin auch dem Dreieck ABC ähnlich. Die homologen Seiten sind die gegenseitig parallelen.

2) Zwei Dreiecke ABC, A′B′C′ (Fig. 87) sind ähnlich, wenn ihre Seiten paarweise senkrecht aufeinander stehen. Man verlängere die Seiten A′C′, B′C′ so weit, daß sie die Seite AC in F und E schneiden. Wegen der rechtwinkligen Dreiecke EGC, EC′F sind C und E, so wie C′ und E Complementwinkel zu einander, daher C = C′. Ebenso beweist man, daß A = A′, B = B′. Die homologen Seiten sind die gegenseitig senkrechten.

3) Die Linien AB, AC, AD.... (Fig. 83), welche von einem Punkte A ausgehen, schneiden irgend zwei Parallelen BF, bf in proportionale Theile. Die ähnlichen Dreiecke ABC, Abc geben $\frac{AC}{Ac} = \frac{BC}{bc}$; die Dreiecke ACD, acd geben ähnlicherweise $\frac{AC}{Ac} = \frac{CD}{cd}$; also $\frac{CD}{cd} = \frac{BC}{bc}$. Man hat ebenso $\frac{CD}{cd} = \frac{DE}{de}$.....

4) Sind die Geraden Aa, Ee, Hh (Fig. 82) gleich weit abstehende parallele Linien, so sind die Punkte E und e die Mitten von AH und ah, und umgekehrt. Ueberdies ist Ee die Hälfte von (Aa+Hh), weil, wenn die Linie AC parallel zu ah gezogen wird, $EB = \frac{1}{2}HC$ und $Be = Aa = Ch = \frac{1}{2}(Aa + Ch)$; folglich $Ee = \frac{1}{2}(Aa + Hh)$.

5) Auf die vorhergehenden Sätze gründet sich die Construction der Maßstäbe. Nachdem man irgend eine Anzahl gleicher Theile auf eine unbegrenzte Gerade CI (Fig. 88), z. B. 5 von C nach D, getragen hat, errichte man in den Theilungspunkten Senkrechten; trage dann ebenfalls auf AC 5 gleiche beliebige Theile Ca, ac....; lege

ferner durch die Punkte a, c, e.... Linien mit CI parallel, und ziehe endlich die Transversalen CB, 20 F, 15 G.... Aus dieser Construction folgt, daß ab, cd, ef.... beziehungsweise $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$..... von AB sind, weil Ca, Cc, Ce... $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$... von CA betragen. eo ist = ef + fo oder $(\frac{3}{5}+\frac{15}{5})$ von AB, oder $\frac{18}{25}$ von CD. Man hat also die Linie CD in 25 gleiche Theile getheilt, was wegen der Kleinheit der Theile auf einem andern Wege nicht so deutlich für die Sinne bewerkstelligt werden könnte. Man bedient sich eines solchen Maßstabes, um eine Länge in gleiche Theile zu theilen. Man sucht nämlich, wie viel Theile des Maßstabes die fragliche Länge enthält, indem man mit Hülfe des Zirkels eine gleiche Länge auf eine der unbegrenzten Parallelen trägt, und sieht, welchem Theilungspunkt sie möglichst nahe kommt. Fällt die zu messende Länge, z. B. von L nach o, so enthält sie 57 Theile. Will man Lo in 9 gleiche Theile theilen, so berechnet man den neunten Theil von 57, was 6 macht, und nimmt eine Länge von 6 Theilen des Maßstabes. Ein zweiter Gebrauch des Maßstabes besteht darin, daß man Linien einer Zeichnung nach gegebenem Verhältnisse aufs Papier trägt. Gewöhnlich werden CD und CA in zehn gleiche Theile abgetheilt. Die Transversalen sind zur Erleichterung des Gebrauchs mit den gehörigen Nummern bezeichnet. Ein solcher Maßstab erhält den Namen des zehntheiligen (Fig. 89).

Anmerkung. Man pflegt diesen Maßstab auch einen verjüngten zu nennen. Leicht ist es, sich einen verjüngten Maßstab nach der Duodecimaleintheilung zu verfertigen.

6) Ein anderes Mittel um kleinere Theile eines Maßstabes zu erhalten, beruht auf folgendem: Die gleichen Längen AB, CD (Fig. 90) seien die eine in 5, die andere in 6 gleiche Theile an den Punkten 1, 2, 3... und 11, 12... getheilt. Die Länge A 11, welche wir durch a darstellen wollen, macht $\frac{1}{5}$ von AB, oder $a = \frac{1}{5}AB$; C1 beträgt $\frac{1}{6}$ von AB; daher $A\,11 - C\,1 = \frac{1}{5}AB - \frac{1}{6}AB = \frac{1}{30}AB$ oder $\frac{1}{6}a$. Liegen nun die beiden Lineale aneinander, so daß C in A, D in B sich befindet, so wird der Theilstrich 11 von dem Theilstrich 1 um $\frac{1}{6}a$, der Theilstrich 12 von dem Theilstrich 2 um $\frac{2}{6}a$, 13 von 3 um $\frac{1}{6}a$... entfernt sein. Dies vorausgesetzt, hätte man nun gefunden, daß eine auf den Maßstab AB getragene Länge sich von dem Nullpunkt bis zu dem Punkte i erstreckt, so würde diese Länge 13 Theile plus den Bruch $i\,13$ enthalten, der jetzt zu bestimmen übrig bleibt. Man bringt deshalb das Lineal CD (man nennt es Vernier oder Nonius, von dem Namen des

Erfinders) in die Lage von C′D′ in die Richtung von AB, so daß C′ dem Punkte i entspricht. Findet man bei der Untersuchung der folgenden Theilstriche, daß zwei derselben, H und 5, zusammentreffen, so ist der Theilstrich 17 von dem Theilstrich 4 um $\frac{1}{8}$a, der Theilstrich 16 vom Theilstrich 3 um $\frac{2}{8}$a entfernt, u. s. w. Der Theilstrich 13 steht endlich von dem Punkte C′ oder i um $\frac{5}{8}$a ab; i 13 demnach gleich $\frac{5}{8}$a, und 13 $\frac{5}{8}$a die vorgelegte Länge.

Man rückt die Theilpunkte gehörig nahe aneinander, damit die Brüche kleiner werden, und das Eintreffen zweier Theilstriche in allen Fällen als hinreichend genau zu betrachten ist. Entsprechen n — 1 Theile von AB n Abtheilungen des Nonius CD, so gibt der letztere den nten Theil einer Abtheilung des Maßstabes. Hat ein Zusammentreffen an dem kten Theilstrich des Nonius statt, so beträgt der Bruch $\frac{k}{n}$. Kurz die Ganzen werden durch die Ziffern des Lineals AB, und der Bruchtheil durch die des Nonius CD angezeigt. In dem Maßstab der Figur 91 kommen auf 9 Theile 10 Theile des Nonius, der sonach die Zehntel angibt. Trifft also bei einer Länge, die von o bis A geht, ein Theilstrich auf den sechsten Theilpunkt des Nonius, so beträgt die fragliche Länge 57,6.

Das nämliche Prinzip wendet man bei der Theilung der Kreisbogen an den sogenannten Winkelmessern an. Man theilt vorerst den Kreisumfang in 360 Theile oder Grade, und jeden Grad in zwei gleiche Theile. Eine um den Mittelpunkt bewegliche Alhidadenregel trägt an ihrem Ende einen Nonius, von dem 30 Theile 29 solcher halber Grade ausmachen. Die Theilstriche des Nonius werden also um $\frac{1}{30}$, $\frac{2}{30}$, $\frac{3}{30}$... von den halben Geraden entfernt sein, und die Minuten der zu messenden Winkel angeben. Der Nullpunkt der Alhidadenregel (Fig. 36) sei anfänglich in a, dem Nullpunkt des Kreises, wenn man die Regel nach einem bestimmten Punkt A richtet, wobei das Instrument jederzeit in der Ebene der Punkte A, C, B bleibt. Rückt man jetzt die Alhidadenregel in die Visirlinie des Punktes B, so wird der Nullpunkt der Regel auf einen Punkt b des Kreises zu liegen kommen. Der Bogen ab, das Maß des zu messenden Winkels, beträgt so z. B. 53 Grade und einen Bruch, zu dessen Bestimmung in Minuten der Nonius dient. Man braucht deshalb nur zu untersuchen, mit welchem Theilpunkt des Nonius ein Theilstrich des Kreises zusammenfalle, und die Stelle jenes Theilpunktes vom Nullpunkt an

gerechnet zu zählen. Zu diesem Zweck werden die Ziffern der Theilpunkte des Nonius von 5 zu 5 aufgetragen. Man liest also auf dem Kreise die Grade und auf dem Nonius die Minuten der zu messenden Winkel ab.

§. 68. Wenn man vom Scheitel A des rechten Winkels eines rechtwinklichen Dreiecks ABC (Fig. 92) auf die Hypothenuse eine Senkrechte AD fällt, so entstehen zwei Dreiecke ABD, ADC, welche unter sich und dem ganzen Dreiecke ähnlich sind. Denn in den Dreiecken ABD und ABC ist der Winkel bei B gemein und die Winkel D und BAC als rechte gleich; folglich Winkel $C = \alpha$. Ebenso ist in den Dreiecken ADC und ABC der Winkel C gemein und die Winkel BAC und D als rechte gleich; folglich $\beta = B$. Die Dreiecke ABD und ADC haben überdies ihre Seiten gegenseitig auf einander senkrecht. Die zwischen den homologen Seiten aufgestellten Proportionen geben folgende Sätze:

1) Die Senkrechte AD ist mittlere Proportionale zwischen den beiden Segmenten der Hypothenuse.

Die Dreiecke ABD und ADC geben nämlich $\frac{DB}{AD} = \frac{AD}{DC}$, woraus $\overline{AD}^2 = \overline{BD} \times \overline{DC}$.

2) Jede Kathete ist mittlere Proportionale zwischen der ganzen Hypothenuse und dem anliegenden Segment derselben. Die Dreiecke ABD und ABC geben $\frac{BD}{AB} = \frac{AB}{BC}$, woraus $\overline{AB}^2 = \overline{BD} \times \overline{BC}$. Die Dreiecke ADC und ABC geben ebenso $\overline{AC}^2 = \overline{DC} \times \overline{BC}$.

3) Das Quadrat der Hypothenuse BC verhält sich zu dem Quadrat einer Kathete AB, wie die Hypothenuse BC zu dem dieser Kathete anliegenden Segmente BD. Es erfolgt dies unmittelbar aus der Gleichung $\overline{AB}^2 = \overline{BD} \times \overline{BC}$; wenn man beiderseits mit $\overline{BC}^2$ dividirt, erhält man $\frac{\overline{AB}^2}{\overline{BC}^2} = \frac{BD}{BC}$.

4) Das Quadrat der Hypothenuse ist gleich der Summe der Quadrate der beiden Katheten. Addirt man nämlich die beiden Gleichungen $\overline{AB}^2 = \overline{BD} \times \overline{BC}$ und $\overline{AC}^2 = \overline{DC} \times \overline{BC}$, so findet man $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}\,(\overline{BD} + \overline{DC}) = \overline{BC}^2$.

Werden die den Winkeln A, B, C gegenüberliegenden Seiten durch a, b, c dargestellt, wo a die Hypothenuse bedeutet, so hat man $a^2 = b^2 + c^2$.

Dieser Lehrsatz, der 47te in den Elementen des Euklides, ist der wichtigste Satz in der gesammten Geometrie, er lehrt uns die Länge einer Seite eines rechtwinkligen Dreiecks finden, wenn die beiden andern bekannt sind. Man hat in der That $a = \sqrt{(b^2 + c^2)}$ und $b = \sqrt{(a^2 - c^2)}$.

Werden also die Seiten a, b, c auf eine Einheit bezogen, so mißt man erst zwei derselben (§. 22), mittelst einer einfachen Rechnung wird dann die Zahl gefunden, welche die Länge der dritten angibt. Ist z. B. $b = 3$, $c = 4$, so hat man $a^2 = 9 + 16 = 25$, woraus $a = 5$.

Anmerkung. Man nennt den vorhergehenden Satz, nach seinem angeblichen Erfinder, dem griechischen Philosophen Pythagoras, den pythagoräischen Lehrsatz. Das Umgekehrte dieses Satzes ergibt sich aus den zwei folgenden:

Uebrigens kann man auf eine direkte Art darthun, daß das Dreieck ADC rechtwinklig ist, wenn $\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2$ (Fig. 15). Denn zieht man DB senkrecht auf CD, nimmt alsdann $DB = AD$; so gibt das rechtwinklige Dreieck DCB die Gleichung $\overline{CB}^2 = \overline{DB}^2 + \overline{DC}^2$. Aus den beiden Gleichungen ergibt sich $CB^2 = AC^2$, mithin die Gleichheit der Dreiecke ACD, BCD; der Winkel ADC daher gleich $CDB = R$.

§. 69. Das Quadrat einer Seite eines beliebigen Dreiecks ist gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten $\pm$ dem doppelten Produkte aus einer dieser beiden Seiten und der Projection der andern Seiten auf diese. Man nimmt das Zeichen +, wenn die Seite, derer Werth man sucht, einem stumpfen Winkel, und das Zeichen —, wenn diese Seite einem spitzen Winkel gegenüber liegt. In der That ist der Winkel A (Fig. 64) des Dreiecks ABC spitz, so erhält man durch Herablassen der Senkrechten BD die rechtwinkligen Dreiecke CBD, ABD. Sie geben $\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DC}^2$, $\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AD}^2$; woraus $\overline{BC}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{AB}^2 - \overline{AD}^2$, oder $a^2 = c^2 + \overline{DC}^2 - x^2$, wenn man die drei Seiten BC, AC, AB des Dreiecks bezüglich durch a, b, c darstellt und $AD = x$ setzt. Nun ist $DC = AC - AD = b - x$.

Wird dieser Werth in den Ausdruck von a^2 substituirt, so kommt $a^2 = b^2 + c^2 - 2bx$. Ist der Winkel A stumpf, wie dies bei dem Dreieck A′BC der Fall ist; so besteht der ganze Unterschied darin, daß $DC = CA' + A'D = b + x$. Man erhält alsdann $a^2 = b^2 + c^2 + 2bx$, wo x das dem Winkel A′ anliegende Segment darstellt, welcher Winkel der gesuchten Seite a gegenüber steht.

§. 70. Sind also die drei Seiten eines Dreiecks bekannt, so läßt sich leicht bestimmen, ob der irgend einer Seite gegenüberstehende Winkel ein spitzer, stumpfer oder rechter ist. Man macht die Senkrechten AB und AC (Fig. 16) bezüglich gleich den zwei kleinern Seiten b und c und zieht dann BC. Je nachdem nun $BC < , > \text{ oder } = a$ ist, wird der der größern Seite a gegenüberliegende Winkel ein spitzer, stumpfer oder rechter sein; in letzterm Falle ist BAC das Dreieck selbst.

Sind die Seiten in Zahlen ausgedrückt, so bildet man ihre Quadrate a^2, b^2 und c^2, und vergleicht dann das größte mit der Summe der beiden andern. Ist solches gleich, kleiner oder größer als die Summe, so ist der der größern Seite gegenüberliegende Winkel ein rechter, spitzer oder stumpfer. Die Rechnung kann uns selbst die Länge des Perpendikels $BD = h$ geben. Denn aus unserer Gleichung entnehmen wir (Fig. 64) $x = AD = \frac{1}{2}b - \frac{(a+c)\,(a-c)}{2b}$. x wird negativ, sobald der Winkel A, auf den das Segment sich bezieht, stumpf ist, was in dem Dreieck A′BC statt findet, wo $a^2 > b^2 + c^2$. Der Bruch erhält das Zeichen +, wann $a < c$, wie dies in der Figur 65 der Fall ist.

Das zweite Segment der Basis ist $CD = y = b - x$; endlich die Höhe $h = BD = \sqrt{[(c+x)\,(c-x).]}$

Es lassen sich auf diese Formeln die Logarithmen anwenden. Hätte man $a = 150$, $b = 66$, $c = 110$, so sieht man, daß das Dreieck möglich ist (§. 54), weil $150 < 110 + 66$. Ueberdies ist $150^2 > 110^2 + 66^2$, folglich der Winkel A stumpf. Man findet ferner $AD = x = 33 - 78{,}78\ldots = -45{,}7878\ldots$ $BD = h = 100{,}017$.

§. 71. Wenn eine Gerade AC (Fig. 93) einen Winkel A irgend eines Dreiecks ABD halbirt, so theilt sie die gegenüberstehende Seite BD in zwei Abschnitte BC, CD, welche den einschließenden Seiten AB, AD proportional sind. In der That zieht man BE zu AC parallel und verlängert die Seite DA, bis sie diese Parallele in E schneidet,

so hat man $\frac{AD}{DC} = \frac{EA}{BC}$. Nun ist der Winkel DAC = BAC = ABE, ferner E = DAC; folglich E = ABE. Das gleichschenklige Dreieck ABE gibt AE = AB; daher $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$.

Anmerkung. Auch der umgekehrte Satz findet statt. Wird nämlich die Seite BD in C so getheilt, daß $\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC}$ und dann AC gezogen, so wird von dieser Linie der Winkel A halbirt. Man mache die Construction wie vorhin. Dadurch erhält man $\frac{AD}{EA} = \frac{CD}{BC}$. Die Zusammenstellung beider Gleichungen gibt EA = AB, folglich Winkel E = EBA. Nun ist aber E = CAD und EBA = BAC; daher BAC = CAD.

§. 72. Die Stücke zweier Sehnen BE, CD (Fig. 94), welche sich in A schneiden, bilden gleiche Produkte, d. h. man hat $\overline{BA} \times \overline{AE} = \overline{DA} \times \overline{AC}$. Wenn man die Sehnen BC, DE zieht, so entstehen die ähnlichen Dreiecke BAC, ADE, weil die Winkel E und C, desgleichen die Winkel B und D, als auf einerlei Bogen stehende Peripheriewinkel, gleich sind. Vergleicht man die homologen Seiten so kommt $\frac{BA}{AC} = \frac{AD}{AE}$, woraus $\overline{BA} \times \overline{AE} = \overline{AC} \times \overline{AD}$.

Anmerkung. Den eben bewiesenen Lehrsatz, so wie den des §. 75, pflegt man folgendermaßen auszudrücken: Zwei sich schneidende Sehnen theilen sich so, daß ihre Segmente in umgekehrter Ordnung proportional sind. Zwei Secanten stehen in umgekehrtem Verhältniß mit ihren ausserhalb des Kreises liegenden Theilen. Wir gaben den erstern Ausdrücken den Vorzug, weil sie uns klarer und faßlicher schienen.

§. 73. Die auf den Durchmesser BE (Fig. 95) errichtete Senkrechte DA heißt eine Ordinate. Die Ordinate AD ist mittlere Proportionale zwischen den beiden Segmenten AB, AE des Durchmessers. In der vorhergehenden Proportion ist nämlich hier AD = AC. Es ergibt sich übrigens dies auch unmittelbar aus §. 68, indem das rechtwinklige Dreieck ABC (Fig. 92) in den Halbkreis eingeschrieben werden kann.

Um also eine mittlere Proportionallinie zwischen zwei gegebenen Linien m und n (Fig. 95) zu finden, nimmt man auf einer unbegrenzten Geraden AB = m, AE = n; beschreibt dann über ihrer Summe als Durchmesser einen Kreis. Die aus dem Punkte A errichtete Senkrechte AD wird die verlangte mittlere Proportionale sein.

§. 74. Aus den im §. 63 bewiesenen Eigenschaften des rechtwinkligen Dreiecks folgt auch, daß die Sehne AB (Fig. 92) die mittlere Proportionale zwischen dem Durchmesser BC und dem entsprechenden Segment BD ist. Man hat hiernach (Fig. 96) $\overline{BA}^2 = \overline{CB} \times \overline{BD}$ und $\overline{BE}^2 = \overline{BC} \times \overline{BF}$, woraus $\frac{\overline{BA}^2}{\overline{BE}^2} = \frac{BD}{BF}$; die Quadrate der Sehnen, welche von einem Endpunkt eines Durchmessers aus gezogen sind, verhalten sich also wie die Segmente, die auf dem Durchmesser zwischen dem beiden Sehnen gemeinschaftlichen Endpunkt und den Senkrechten liegen, die von ihren andern Endpunkten auf den Durchmesser gefällt werden.

Anmerkung. Man kann eine mittlere Proportionale zwischen zwei gegebenen Geraden auch dadurch finden, daß man die größere zum Durchmesser BC macht, die kleinern von B nach D trägt, die Senkrechte DA errichtet und die Sehne BA zieht, welche die gesuchte mittlere Proportionale sein wird.

§. 75. Die Secanten AE, AC (Fig. 97), welche von einem Punkte A ausgehen, geben mit ihrem ausserhalb des Kreises liegenden Theil multiplicirt ein und dasselbe Produkt, d. h. man hat $\overline{AB} \times \overline{AE} = \overline{AD} \times \overline{AC}$. Wenn man die Sehnen DE, BC zieht, so erhält man die ähnlichen Dreiecke ADE, ABC, weil der Winkel A beiden gemein ist, und die Winkel C und E gleich sind. Man erhält also $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$, woraus $\overline{AB} \times \overline{AE} = \overline{AD} \times \overline{AC}$.

Die Tangente AB (Fig. 98) ist mittlere Proportionale zwischen der beliebigen Secante AC und ihrem äussern Theil AD. Zieht man BD, so hat man die ähnlichen Dreiecke ABD, ABC; denn der Winkel A ist ihnen gemein, und die Winkel C und ABD sind gleich. Die Vergleichung ihrer homologen Seiten gibt $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC}$, oder $AB^2 = \overline{AD} \times \overline{AC}$.

Vorstehende Sätze lassen sich in einen einzigen zusammenfassen. Bezeichnen nämlich a und b die Entfernungen eines Punktes A einer Geraden ADC (Fig. 94 und 97) von den Punkten, in welchen sie den Umkreis schneidet, oder AD = a und AC = b; stellen ferner a′ und b′ ähnliche Dinge für eine andere Gerade ABE dar, oder AB = a′, AE = b′; so hat man ab = a′b′, in welchem Punkte A und unter welchem Winkel die geraden Linien sich auch schneiden mögen. Dreht man die Linie AE um den Punkt A, so ändern sich die Durchschnittspunkte B und E; diese Punkte fallen zusammen, wenn die Linie AB zur Tangente wird.

§. 76. Wir wollen nun einige Aufgaben vornehmen, welche sich mit Hülfe der in diesem Abschnitte enthaltenen Sätze lösen lassen.

I. Die Höhe eines Gebäudes AB zu messen (Fig. 99). Zu dem Ende steckt man einen Stab DE vertical ein, visirt dann in D nach B, und bemerkt den Punkt C, wo die Linie BD den Horizont trifft. Man hat dann offenbar $\frac{CE}{DE} = \frac{CA}{AB}$, wo Alles bekannt ist mit Ausnahme des Gliedes AB, welches durch Rechnung bestimmt wird.

Die Ausführung dieser Operation wird in der Praxis dadurch bequemer, daß man sich der Längen der Schatten AC und E′C′ bedient, welche die Höhen AB und D′E′ auf den Horizont werfen.

Anmerkung. Der griechische Philosoph Thales soll die Höhen der egyptischen Pyramiden durch ihre Schattenlänge schon gemessen haben.

II. An zwei gegebene Kreise eine gemeinschaftliche Tangente zu legen. Es sei AD′D die verlangte Tangente (Fig. 100). Verbinden wir die Mittelpunkte durch die Gerade CC′A und ziehen die Radien CD und C′D′, so haben wir $\frac{AC'}{AC} = \frac{C'D'}{CD}$. Für die Secante AI erhalten wir hiernach $\frac{AC'}{AC} = \frac{I'C'}{IC}$, wenn anstatt CD und C′D′ bezüglich CI und C′I′ gesetzt wird; C′I′ ist folglich zu CI parallel. Man ziehe also zwei beliebige parallele Radien CI, C′I′; die Gerade II′ wird die Centrallinie CC′ in einem Punkte A schneiden, durch welchen die an eine der Kreise gelegte Tangente zugleich auch den zweiten Kreis berührt. Wenn sich die Kreise nicht schneiden, so liefert der Punkt A′ eine zweite Auflösung, was vier Tangenten gibt.

Anmerkung. Man sieht, daß der Durchschnittspunkt zweier zusammengehöriger Tangenten in die Centrallinie fällt.

III. Durch zwei gegebene Punkte C, D ein Kreis zu legen, der eine gegebene Gerade AB berührt (Fig. 98). Diese Gerade kann nicht zwischen C und D gehen, weil sie sonst die Sehne CD schneiden würde. Man verbinde die Punkte C und D durch eine Gerade, und verlängere dieselbe, bis sie die AB in A schneidet. Da AD und AC bekannt sind, so handelt es sich darum, AB zu finden; es bleibt dann noch übrig, durch die drei Punkte B, C, D einen Kreis zu legen. Nun ist AB eine Tangente und AC eine Secante, was uns $\overline{AB}^2 = \overline{AC} \times \overline{AD}$ gibt. Leicht wird man aber die mittlere Proportionale zwischen AC und AD erhalten.

Die Aufgabe läßt zwei Auflösungen zu, da man die Linie AB auf die entgegengesetzte Seite tragen kann. (Man sehe die analytische Geometrie in der Ebene.)

Wenn die Tangente der Sehne parallel wäre, wie in Fig. 54, wo A, B die gegebenen Punkte sind, und TG die Tangente, so wird offenbar der Mittelpunkt des gesuchten Kreises auf der aus der Mitte der Sehne AB senkrecht errichteten Linie liegen, und der Fußpunkt F der Berührungspunkt sein. Man hätte demnach durch die drei Punkte A, B und F einen Kreis zu legen.

IV. Ein Kreis CAB (Fig. 101) zu beschreiben, welcher durch einen gegebenen Punkt m geht, und zwei der Lage nach gegebenen Gerade DA, BD berührt. Man weiß, daß der Mittelpunkt des gesuchten Kreises auf der den Winkel ADB halbirenden Linie CD liegt. Ueberdies wird die auf CD errichtete Sehne im in o in zwei Hälften geschnitten. Man ziehe folglich diese Senkrechte und nehme om = oi; man hat alsdann nur nöthig, einen Kreis zu beschreiben, welcher durch die Punkte i und m geht und eine der beiden Linien DB oder DA berührt.

Wenn der gegebene Punkt in A auf einer der Geraden liegt, so befindet sich der Mittelpunkt des gesuchten Kreises im Durchschnitte C der Linie DC mit der auf DA errichteten Senkrechten AC.

Anmerkung. Die Auflösung wird einfacher, wenn die gegebenen Linien parallel laufen.

Wir sind also im Stande, einen Kreis zu beschreiben, der durch drei Punkte geht, oder der durch zwei Punkte geht, und zugleich eine

Gerade berührt, oder der durch einen Punkt geht und zwei Gerade berührt, oder endlich der drei Gerade zugleich berührt.

V. Einen Kreis BiA (Fig. 101) zu beschreiben, der zwei gegebenen Gerade DA, DB und einen gegebenen Kreis Km zugleich berührt. Der Mittelpunkt C des gesuchten Kreises liegt auf der den Winkel BDA halbirenden Linie CD. Aus dem noch unbekannten Mittelpunkte C verzeichne man einen Kreis HKG, der durch den Mittelpunkt K des gegebenen Kreises geht. Der Mittelpunkt K befindet sich in einem beliebigen Punkt dieses Kreisumfanges HKG; der verlangte Kreis CAm soll nun jenen beweglichen Kreis berühren. Betrachten wir den letztern in seiner Lage HA, wo er die Gerade DA berührt. Die an den Kreis HK gelegte Tangente LH wird senkrecht auf dem Radius CH, mithin parallel zu DA sein. Die Gerade LH ist hiernach als bekannt anzusehen, weil sie der Linie DA parallel ist, und von derselben um die gegebene Größe Km = HA absteht. Das Nämliche gilt von der Linie L′H′, welche zu DB parallel ist. Der Hülfskreis HKGH′ wird also leicht zu construiren sein, indem er die Geraden LH, L′H′ zugleich berührt und durch das Centrum des gegebenen Kreises geht. Da der Mittelpunkt des Hülfskreises mit dem des gesuchten Kreises zusammenfällt, so hat man nur nöthig CK zu ziehen, welche die Peripherie des gegebenen Kreises in m durchschneidet. Beschreibt man nun aus dem Punkte C mit dem Halbmesser Cm einen Kreis, so wird dieser der gesuchte Kreis sein.

Da die Parallelen LH, L′H′ innerhalb des Winkels gezogen werden können, so bringt die Aufgabe zwei Auflösungen mit sich, insofern der Kreisumfang Km weder DA, noch DB schneidet.

VI. In dem Umfang eines Kreises ABD (Fig. 117) einen Punkt C zu finden, daß die nach zwei andern gegebenen Punkten B und D gezogenen Sehnen BC, CD ein gegebenes Verhältniß $\frac{m}{n}$ haben. Die Aufgabe sei gelöst. Die den Winkel BCD halbirende Linie CO gibt $\frac{BC}{CD} = \frac{BO}{OD} = \frac{m}{n}$. Man verbinde also die zwei gegebenen Punkte B und D durch eine Linie und theile diese in O nach dem gegebenen Verhältnisse. Ferner halbire man den Bogen BAD in A; die Linie AO wird den Kreisumfang in dem gesuchten Punkt C treffen.

VII. Die Sehne AB = k, und die Höhe DE = h eines Kreissegmentes ABDE (Fig. 52) sind gegeben; man soll den Radius DC = r durch Rechnung finden. Das rechtwinklige Dreieck ADE gibt $\overline{AD}^2 = \frac{1}{4}k^2 + h^2$; ausserdem hat man auch $\overline{AD}^2 = 2hr$. Setzt man diese beiden Werthe einander gleich, so kommt $r = \frac{1}{2}h + \frac{k^2}{8h}$. Die dem Segmente entsprechende Höhe nennt man zuweilen auch Pfeil. Wenn k = 313 und h = 12,32, so findet man r = 1000. Diese Formel kann zur Auffindung eines Mittelpunkts C eines gegebenen Bogens dienen.

VIII. Durch einen gegebenen Punkt B (Fig. 102), dem Durchschnittspunkte zweier Kreise, eine Sehne CBD zu ziehen, die eine gegebene Länge M habe. Die Aufgabe sei gelöst. Man ziehe durch den Punkt B eine beliebige Linie EF, verbinde A mit E, C, F und D. Die Dreiecke AEF, ACD geben, weil die Winkel E und C als auf einerlei Bogen AIB stehende Peripheriewinkel und die Winkel F und D aus demselben Grunde gleich sind: $\frac{EF}{CD} = \frac{AE}{AC}$; AC ist mithin die vierte Proportionale von EF, M und AE. Man nehme daher FL = M, ziehe darauf LK parallel zu AF; AK wird dann = AC sein. Es handelt sich also blos darum, aus A mit dem Radius AK einen Kreis zu beschreiben; die Durchschnittspunkte C und C′ sind die verlangten Punkte. Man erhält also zwei Auflösungen der Aufgabe, welche ungereimt wäre, wenn der mit dem Radius AK beschriebene Bogen ganz ausserhalb des Kreises AE läge.

IX. Eine Linie CA (Fig. 103) dergestalt zu theilen, daß der größere Theil BC die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Linie AC und dem kleinern Theile AB ist; man nennt dies auch eine Linie nach dem äussern und mittlern Verhältniß theilen. Die Proportion $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{AC}$ kann uns BC nicht kennen lehren, da sie eine zweite Unbekannte AB enthält. Vermehren wir aber jedes Vorderglied um sein Hinterglied, so haben wir $\frac{AC}{BC} = \frac{BC + AC}{AC}$ oder $\overline{AC}^2 = \overline{BC}(\overline{BC} + \overline{AC})$, weil AC = AB + BC. Es handelt sich also darum, einen Punkt B dergestalt zu finden, daß AC mittlere Proportionale zwischen BC und BC + AC sei. Es wird dies dadurch erreicht, daß man einen Kreis construirt, von dem AC Tangente ist, BC + AC die ganze Secante, BC

das ausserhalb liegende Stück, mithin AC das in dem Kreis enthaltene Stück. Man errichte in A über AC die Senkrechte AD, mache $AD = \frac{1}{2} AC$ und ziehe die Hypothenuse. Man erhält $\overline{AC^2} = \overline{CE} \times \overline{CF} = \overline{CE} \times (\overline{CE} + \overline{CA})$; CE ist folglich die unbekannte Länge, die man von C nach B zu tragen hat, um den verlangten Punkt zu finden.

Anmerkung. Man kann auch folgendermaßen verfahren (Fig. 104): Man hat gefunden $AC^2 = BC\,(BC + AC) = BC \times BD$, wenn man die Linie AC um $CD = CA$ verlängert. E sei die Mitte von DC; man hat $BC = BE - EC$, $BD = EB + EC$. Das Produkt dieser beiden Ausdrücke ändert unsere Gleichung in folgende um: $AC^2 = EB^2 - EC^2$; AC, BE, EC, sind demnach die drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks FEC. Man errichte daher die Senkrechte CF und mache sie gleich AC, ziehe die Hypothenuse EF und trage solche von E nach B, so wird dieser letztere der gesuchte Punkt sein. Diese Construction läßt sich auf einen spätern Lehrsatz mit Vortheil anwenden.

X. Ein Dreieck def in ein anderes ABC (Fig. 105) einzuschreiben, d. h. es in die Lage DEF bringen, so daß d in D auf die Seite AC zu liegen komme, u. s. w. Die Aufgabe werde als gelöst betrachtet. Legt man durch die Punkte E, F, B einen Kreis, desgleichen einen Kreis durch die Punkte A, D, F, so ist ersichtlich, daß das Segment FOE den gegebenen Winkel B, und das Segment FOD den gegebenen Winkel A faßt. Wir beschreiben daher über fe und fd Segmente, welche die Winkel B und A enthalten. Die gegebene Seite AB bildet die Summe der Sehnen in den beiden Kreisen. Legen wir demnach durch den Punkt f mittelst der Aufgabe VIII die Sehne $ab = AB$, so bleibt nur noch übrig, die Linien ad, be zu ziehen und sie bis zu ihrem Durchschnitt in c zu verlängern, um das Dreieck $abc = ABC$ zu erhalten. Man kennt also die Punkte D, E, F, weil $BE = be$, u. s. w. Da man die Sehne ab auf zweierlei Art ziehen kann, so läßt die Aufgabe zwei Auflösungen zu.

Von den Vierecken und den Vielecken überhaupt.

§. 77. Jede durch gerade Linien begrenzte Figur ABCDEF (Fig. 106) wird Polygon oder Vieleck genannt. Das Viereck hat 4 Seiten, des Fünfeck 5, das Sechseck 6, u. s. w. Die Anzahl

der Winkel ist dieselbe, wie die der Seiten; denn so lange das Polygon ungeschlossen bleibt, bringt jede Seite, die man zieht, einen Winkel weiter mit sich, und die Figur erhält eine Seite mehr als sie Winkel hat; die das Polygon schließende Seite endlich bildet zwei Winkel. Eine Linie, wie AD (Fig. 118), die je zwei und zwei, nicht an derselben Seite liegende Winkelspitzen des Polygons verbindet, heißt Diagonale. Die Diagonale AC schneidet das Dreieck ABC von dem Polygon ABCD... von n Seiten ab, und reducirt die Figur auf ein Polygon ACDEF.... von $n - 1$ Seiten. Jede von A aus geführte Diagonale schneidet ebenso ein neues Dreieck ab und vermindert die Seitenzahl des Polygons um eins. Ist man endlich zu einem Viereck ADEF gelangt, so theilt die einzige von A aus mögliche Diagonale dasselbe in zwei Dreiecke. Man hatte also anfänglich ebensoviel Diagonale, als Dreiecke und weggebliebene Seiten; für das Viereck aber gab die einzige Diagonale zwei Dreiecke. Die Zahl der Diagonalen, welche man von einem Winkel A nach allen übrigen hinziehen kann, ist folglich $(n-3)$; die Zahl der dadurch entstandenen Dreiecke ist $(n-2)$.

Anmerkung. Die Gesammtzahl der Diagonalen ist $\frac{n(n-3).}{1 \cdot 2}$

Die Winkel des Sechsecks (Fig. 106) sind auswärtsgehende (convexes Vieleck), der Winkel A (Fig. 107) ist ein einwärtsgehender (concaves Vieleck) (§. 19).

§. 78. Um ein Vieleck, dessen Stücke sämmtlich bestimmt sind, zu construiren, nehme man auf einer unbegrenzten Linie eine Länge AB (Fig. 106) gleich einer der gegebenen Seiten, mache in A und B zwei Winkel BAF, ABC gleich denjenigen, von denen man weiß, daß solche an AB anliegend sind; nehme hiernächst BC und AF den gegebenen Längen gleich, u. s. w. Wenn man auf diese Art die Seiten FA, AB, BC, CD, DE gezogen hat, so ist die Seite FE, welche das Sechseck schließt, nebst den Winkeln E und F bestimmt. Bezeichnet also n die Zahl der Winkel eines Polygons, mithin $2n$ die Zahl seiner Stücke, so ist dasselbe bestimmt, sobald man davon $(2n-3)$ kennt. Es existiren demnach Relationen, welche diese $2n$ Stücke untereinander verbinden, so daß drei derselben als bestimmt anzusehen sind, wenn man die übrigen kennt. Diese Aufgabe der Polygonometrie kann jetzt nicht gelöst werden. Leicht ist es aber, die zwischen den Winkeln stattfindenden Relationen zu ermitteln.

Anmerkung. Zwei Vielecke sind offenbar einander gleich, wenn sie aus derselben Anzahl von Dreiecken bestehen, welche einzeln einander gleich sind und in derselben Ordnung auf einander folgen. Umgekehrt, können zwei gleiche Vielecke immer in gleich viele gleiche und in derselben Ordnung auf einander folgende Dreiecke zerlegt werden. Uebrigens ist die Zerlegung in Dreiecke nicht die einzig mögliche.

§. 79. Die Summe aller innern Winkel eines Vielecks beträgt so viel mal zwei Rechte, als es Seiten hat weniger zwei, oder ist gleich 2R (n—2). Denn zieht man von irgend einem innerhalb des Vielecks angenommenen Punkte O (Fig. 106) nach allen Winkelspitzen gerade Linien OA, OB...., so bilden sich eben so viele Dreiecke AOB, OBC...., als das Polygon Seiten hat. Die Summe aller Winkel in diesen Dreiecken beträgt demnach so viel mal zwei Rechte, als Seiten da sind, oder 2nR. Nun ist die Summe der um den gemeinschaftlichen Punkt O liegenden Winkel gleich 4 Rechten; es bleiben hiernach 2nR—4R für die Vieleckswinkel übrig. Es folgt dies auch daraus, daß diese Summe aus den einzelnen Summen der Winkel der (n—2) Dreiecke, in welche das Polygon durch die Diagonale getheilt wird, zusammengesetzt ist (Fig. 118).

Anmerkung. Hieraus ergibt sich, daß die n Winkel nur als n—1 gegebene Stücke anzusehen sind. Durch n Winkel und n—3 Seiten ist also das Vieleck noch nicht bestimmt.

Für Vielecke mit einwärtsgehenden Winkeln ist der vorhergehende Lehrsatz gleichfalls anwendbar.

§. 80. Die vier Winkel eines Vierecks betragen folglich zusammen vier Rechte. Hat diese Figur zwei Seiten parallel (Fig. 81), so heißt sie Trapez. Sie wird ein Parallelogramm genannt, wenn von den vier Seiten je zwei parallel sind (Fig. 108). Aus §. 39 folgt:

1) Daß jede Diagonale BD das Parallelogramm in zwei gleiche Dreiecke ABD, BCD theilt;

2) daß die gegenüberstehenden Winkel A und C, ferner B und D einander gleich sind;

3) daß die gegenüberstehenden Seiten einander gleich sind;

4) daß, wenn die gegenüberstehenden Seiten eines Vierecks ABCD

gleich, oder zwei gegenüberstehende Seiten gleich und parallel sind, die Figur ein Parallelogramm ist.

Die beiden Diagonalen AC, BD eines Parallelogramms halbiren einander; es folgt dies unmittelbar aus der Gleichheit der Dreiecke AOD und BOC.

Anmerkung. Umgekehrt, wenn sich die Diagonalen eines Vierecks gegenseitig halbiren, so ist die Figur ein Parallelogramm.

Jede durch den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt der Diagonalen gezogene gerade Linie theilt sowohl sich, als das ganze Parallelogramm in zwei gleiche Theile. Man nennt daher diesen Punkt den Mittelpunkt des Parallelogramms.

Das Parallelogramm, dessen vier Seiten einander gleich sind, heißt Raute (Rhombus) (Fig. 109). Die Diagonalen einer Raute schneiden sich unter einem rechten Winkel. Denn die vier Dreiecke AOD, AOB, DOC, BOC sind einander gleich. Umgekehrt, wenn die Diagonalen eines Vierecks sich in gleiche Theile und unter einem rechten Winkel schneiden, so ist die Figur eine Raute.

Hat das Parallelogramm ABCD (Fig 110) einen rechten Winkel A, so hat die Figur durchgehends rechte Winkel. Ein solches Parallelogramm nennt man Rechteck. Die Diagonolen AC, BD eines Rechtecks sind gleich groß.

Ist AB = AD, so heißt das Rechteck ein Quadrat. Das Quadrat hat also vier gleiche Seiten und vier rechte Winkel.

§. 81. Wenn man alle Seiten eines Polygons (Fig. 111) nach gleicher Richtung verlängert, so beträgt die Summe aller äussern dadurch entstandenen Winkel GAB, HBC... jederzeit vier Rechte. Die Summe aller dieser äussern und innern Winkel ist gleich $2n$R. Davon geht $2n$R—4R, als Summe der innern Winkel, ab; es bleibt also für die Summe der äussern Winkel 4R übrig.

Anmerkung. Dieser Satz erstreckt sich nur auf Vielecke mit lauter auswärtsgehenden Winkeln.

§. 82. Ein Polygon heißt regelmäßig (regulär), wenn alle seine Seiten und alle seine Winkel gleich sind. Man sagt, der Kreis ist in ein Vieleck beschrieben, wenn er alle Seiten desselben berührt. Der Kreis ist

dagegen um das Vieleck beschrieben, wenn alle Seiten des Vielecks Sehnen des Kreises sind.

Jedes regelmäßige Vieleck ABCDEF (Fig. 112) kann in und um einen Kreis beschrieben werden.

1) Wir halbiren die Winkel A und B durch die Linien AO und BO, und verbinden den Durchschnittspunkt O dieser Linien mit der Winkelspitze C durch die Gerade OC. Die Dreiecke ABO und BOC sind einander gleich, weil AB = BC, OB gemeinsam ist, und der Winkel ABC in zwei Hälften getheilt wurde; folglich OA = OC = OB. Auf eben diese Art beweist man, daß OB = OD = OC, u. s. w. Hieraus sieht man, daß der Punkt O der Mittelpunkt des zum Vieleck umschriebenen Kreises ist, daß die von diesem Mittelpunkt nach den Winkelspitzen des Vielecks gezogenen Linien gleich sind, daß diese Linien die Polygonswinkel in zwei gleiche Theile theilen, daß die Dreiecke AOB, BOC... gleichschenklig sind, daß endlich die Mittelpunktswinkel AOB, BOC.... einander gleich sind.

2) Da die Sehnen AB, BC.... gleich weit vom Mittelpunkt abstehen, so sind die Senkrechten OG, OI.... einander gleich. Der aus dem Mittelpunkt O mit dem Halbmesser OG beschriebene Kreis wird jede Seite des Vielecks in ihrer Mitte G, I.... berühren.

§. 83. Wir können folglich jedes gegebene regelmäßige Vieleck in und um einen Kreis beschreiben. Das umgekehrte Problem besteht darin, zu einem gegebenen Kreis das gehörige in oder umschriebene regelmäßige Vieleck von bestimmter Seitenanzahl zu finden. Man ist aber weit davon entfernt, dieses Problem in seiner Allgemeinheit auflösen zu können. Wir wollen jetzt die Fälle auseinandersetzen, in denen die Auflösung bewerkstelligt werden kann. Jedoch zuvor bemerken wir, daß, wenn ein regelmäßiges Vieleck von irgend einer Seitenanzahl in den Kreis eingeschrieben ist, es keine Schwierigkeit hat, um diesen Kreis ein regelmäßiges Vieleck von einer gleichen Anzahl Seiten zu beschreiben, und umgekehrt. Es sei ABC.... (Fig. 113) das gegebene umschriebene Polygon. In den Punkten A, B, C.... ziehe man die Tangenten af, ab, bc....; die von diesen Tangenten gebildete Figur ist das vorgelegte umschriebene Polygon. Denn die Dreiecke aAB, bBC.... sind einander gleich und gleichschenklig, weil die Grundlinien AB, BC.... gleich und die an diesen Seiten anliegenden Winkel, welche gleiches Maß haben, ebenfalls ein-

ander gleich sind. Man hat folglich aB = Bb = bC = Cc.... und Winkel a = b = c....

Man könnte auch (Fig. 112) Tangenten durch die Mitten g, i, k.... der Bogen AgB, BiC, CkD.... legen: abcdef würde dann das verlangte Polygon sein. Denn da seine Seiten denen des eingeschriebenen Polygons parallel sind, so werden die Winkel einander gleich sein (§. 39). Ueberdies ist der Winkel GOI durch die Linie OB in zwei gleiche Theile geschnitten, weil B die Mitte des Bogens gi ist. Anderseits ist das Dreieck gOb = bOi, mithin derselbe Winkel gOi durch Ob in zwei Hälften getheilt; die drei Punkte O, B, b liegen demnach in einer geraden Linie. Dasselbe ist mit den Punkten O, C und c, mit O, D und d.... der Fall. Man hat folglich $\frac{AB}{ab} = \frac{OB}{Ob}$, $\frac{BC}{bc} = \frac{OB}{Ob}$, woraus ab = bc, weil AB = BC; und so mit den übrigen Seiten. Da diese doppelte Construction etwas mühsam ist, so zieht man vor, nur eine einzige Tangente ab bis zu den Durchschnittspunkten mit den verlängerten Radien OA und OB zu führen, und alsdann einen Kreis mit dem Halbmesser Oa zu beschreiben, auf dessen Umfang man ab so oft hinträgt, als das Polygon Seiten hat.

Umgekehrt kann man das eingeschriebene Polygon aus dem umschriebenen abcdef herleiten, wenn man die Linien aO, bO.... zieht, und durch die Punkte A, B...., in welchen diese Linien den Umfang des Kreises durchschneiden, die Sehnen AB, BC.... legt.

§. 84. Da alle Centriwinkel in einerlei regelmäßigen Polygonen gleich sind und ihre Summe 4R beträgt, so ist jeder derselben gleich $\frac{4R}{n}$, wenn n die Anzahl der Seiten des Polygons bezeichnet. Der Centriwinkel des gleichseitigen Dreiecks ist folglich $\frac{4}{3}$R; der des Quadrats R; der des regelmäßigen Fünfecks $\frac{4}{5}$R; der des regulären Sechsecks $\frac{2}{3}$R; der des regulären Zehnecks $\frac{2}{5}$R, u. s. w.

Da die Summe der Polygonwinkel gleich 2R (n—2) ist, so beträgt ein jeder derselben $\frac{2R\,(n-2)}{n}$. Der Winkel des Quadrats ist ein rechter; der des regelmäßigen Fünfecks ist $\frac{6}{5}$R; der des regelmäßigen Sechsecks macht $\frac{4}{3}$R; der des regulären Zehnecks $\frac{8}{5}$R.

Jede Seite AB, BC.... bespannt einen Bogen, der gleich $\frac{C}{n}$ ist, wo C die Kreisperipherie darstellt.

§. 85. Die Seite FE des regelmäßigen Sechsecks ist dem Halbmesser OF des umschriebenen Kreises gleich (Fig. 114). Denn der Centriwinkel FOE in diesem Vieleck ist gleich $\frac{2}{3}$R; die gleichen Winkel F und E des gleichschenkligen Dreiecks FOE machen demnach $2R - \frac{2}{3}R$ oder $\frac{4}{3}$R, mithin jeder $\frac{2}{3}$R. Das Dreieck OFE hat also die drei Winkel gleich, woraus FE = OF.

Verbindet man im Sechseck einen Winkel um den andern durch gerade Linien, so erhält man das eingeschriebene gleichseitige Dreieck BDF. Da EO = OF gleich dem Radius r, so ist die Figur ODEF eine Raute, deren Diagonalen sich unter einem rechten Winkel halbiren. Daher $FI = \sqrt{(FO^2 - IO^2)} = \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}r^2)} = r\sqrt{\frac{1}{4}}$; woraus $FD = r\sqrt{3}$. Es ist dies die Seite des eingeschriebenen gleichseitigen Dreiecks.

Theilt man die Bogen AB, BC.... in 2, 4, 8.... gleiche Theile, so erhält man die regelmäßigen eingeschriebenen Vielecke von 12, 24, 48.... 3×2^i Seiten.

§. 86. Da der Centriwinkel des Quadrats (Fig. 110) ein rechter ist, so wird man zwei aufeinander senkrechte Durchmesser AC, BD ziehen, und ihre Endpunkte durch gerade Linien verbinden, um in einen Kreis ein Quadrat einzuschreiben. Man sieht, daß die Figur ABDC lauter rechte Winkel und gleiche Seiten hat. Das rechtwinklige Dreieck AOD gibt $\overline{AD}^2 = \overline{DO}^2 + \overline{AO}^2 = 2r^2$, woraus $\overline{AD} = r\sqrt{2}$. Weil $\frac{AD}{r} = \sqrt{2}$, so folgt, daß im Quadrat das Verhältniß der Diagonale zur Seite incommensurabel ist. Wir können also in einen Kreis die regelmäßigen Vielecke von 4, 8, 16.... 2^i Seiten einschreiben.

§. 87. Es sei AB (Fig. 115) die Seite des regelmäßigen eingeschriebenen Zehnecks. Da der Centriwinkel in diesem Polygon $\frac{2}{5}$R macht, so bleibt für die gleichen Winkel OAB und OBA $2R - \frac{2}{5}R$ oder $\frac{8}{5}$R übrig, was für jeden einzeln $\frac{4}{5}$R gibt, d. h. das Doppelte des Winkels O. Um das Verhältniß von AB zu dem Halbmesser AO zu finden, theilen wir den Winkel B durch die Linie CB in zwei gleiche

Theile. Die Gleichheit der Winkel O und CBO bedingt die Gleichschenklichkeit des Dreiecks OBC, woraus $OC = CB$. Da das Dreieck ACB ebenfalls gleichschenklig ist, indem $C = \frac{4}{5}R = A$, so hat man $CB = AB = OC$. Nach §. 70 ist nun $\frac{AC}{OC} = \frac{AB}{OB}$, oder $\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AO}$, d. h. die Seite AB ist mittlere Proportionale zwischen AC und AO. Ueberdies gibt CO oder $AB < AO$ auch $AC < AB$. Theilt man also den Halbmesser des Kreises nach dem äussern und mittlern Verhältniß, so wird das größere von den beiden Segmenten der Seite des eingeschriebenen regelmäßigen gleich sein. — $AB = BF$ gibt AF als Seite des regelmäßigen eingeschriebenen Fünfecks. — Wir können also ferner in einen Kreis die regelmäßigen Vielecke von 20, 40.... 5×2^i Seiten einschreiben.

Da die Seite des Sechsecks einen Bogen, der der sechste Theil des Umkreises ist, bespannt, und die Seite des Zehnecks einen Bogen, der den zehnten Theil macht, so wird dem Unterschied dieser Bogen, oder $\frac{1}{6}C - \frac{1}{10}C = \frac{1}{15}C$, die Seite des eingeschriebenen regelmäßigen Fünfzehnecks als Sehne angehören. Man erhält hiernach die Polygone von 30, 60.... 15×2^i Seiten.

Wir haben die regelmäßigen Polygone, die sich in einen Kreis einschreiben lassen, nach und nach aufgezählt. Wir können solche unter der Formel $a \times 2^i$ zusammenfassen, wo a eine von den vier Zahlen 3, 4, 5 und 15, und i entweder Null oder eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet. Was die übrigen regelmäßigen Polygone anlangt, so begnügt man sich, versuchsweise, in Ermangelung eines Besseren, den Kreisumfang in die erforderliche Anzahl gleicher Theile zu theilen. Man löst das vorliegende Problem auch mit Hülfe des Proportionalzirkels und des Transporteurs auf. Da diese Instrumente selbst aber durch Probiren construirt werden, so kann man dergleichen Verfahren nicht als streng geometrisch betrachten. Die Eintheilung des Kreisumfanges in eine Anzahl gleicher Theile ist von der größten Wichtigkeit für die Instrumente, welche zur Messung der Winkel dienen. (Man sehe L. Mascheronis Werk über den Gebrauch des Zirkels. Es ist dies Werk von J. Ph. Grüson ins Deutsche übersetzt worden.)

Da die Theilung des Winkels in drei gleiche Theile dergleichen Operationen vervollständigt, so hat man sich lange Zeit, aber vergebens, bemüht, die Auflösung dieses Problems zu finden. Es ist jetzt

bewiesen, daß sie mit bloßer Hülfe des Lineals und Zirkels nicht bewerkstelligt werden kann. (Siehe die analytische Geometrie in der Ebene.)

Anmerkungen: 1) Ein Instrument, aus zwei Linealen bestehend, welche sich um einen gemeinschaftlichen Pnnkt drehen lassen, und auf welche von diesem Punkte aus die nämliche Anzahl gleicher Theile getragen sind, heißt Proportionalzirkel. 2) Auſſer den oben aufgezählten gibt es noch andere regelmäßige Polygone, die sich geometrisch in den Kreis beschreiben lassen. Unser große Gauß zeigt in seinen Disquisitiones arithmeticæ, daß die regelmäßigen Vielecke, deren Seitenzahl durch die Formel $2^n + 1$, wo n eine ganze Zahl bedeutet, ausgedrückt wird, sich geometrisch genau construiren lassen, wenn $2^n + 1$ eine Primzahl ist. Die dazu erforderlichen Betrachtungen liegen aber ausserhalb den Grenzen der Elementar-Geometrie.

§. 88. Wir schließen diesen Abschnitt mit einigen Eigenschaften des Vierecks, das sich in den Kreis beschreiben läßt.

I, In dem eingeschriebenen Viereck ABCO (Fig. 116) hat man $A + C = 2R$, weil die zwischen den Schenkeln der Winkel A und C liegenden Bogen den ganzen Umkreis bilden; ebenso ist $B + O = 2R$. In jedem Viereck, welches sich in einen Kreis einschreiben läßt, ist folglich die Summe je zwei gegenüberstehender Winkel gleich 2R. — Umgekehrt kann, wenn $A + C = B + O = 2R$, das Viereck in einen Kreis beschrieben werden. Denn ginge der durch die drei Punkte A, O, C gelegte Kreis nicht durch den Punkt B, so müßte Winkel $B = B'$, was ungereimt ist.

Man kann also um jedes Rechteck ABCD (Fig. 110) einen Kreis beschreiben; die Diagonalen BD, AC sind die Durchmesser.

II. In jedem Viereck ABCD (Fig. 117), welches sich in einen Kreis beschreiben läßt, ist das Produkt der Diagonalen gleich der Summe der Produkte der gegenüberstehenden Seiten. Wir ziehen die Linie CK, so daß der Winkel $KCD = BCO$, mithin $BCK = OCD$, wenn man OCK beiderseits hinzuaddirt. Da nun der Winkel $BAC = BDC$ ist, so sind die Dreiecke BAC und KCD einander ähnlich. Aus demselben Grunde sind die Dreiecke CBK und CAD ähnlich.

Wir haben daher: $\frac{KD}{CD} = \frac{AB}{AC}$, und $\frac{BK}{BC} = \frac{AD}{AC}$,

woraus $\overline{KD} \times \overline{AC} = \overline{AB} \times \overline{CD}$, und

$$\overline{BK} \times \overline{AC} = \overline{AD} \times \overline{BC}.$$

Addiren wir diese beiden Resultate, so kommt

$$\overline{AC} \times \overline{BD} = \overline{AB} \times \overline{CD} + \overline{AD} \times \overline{BC}.$$

Anmerkung. Man nennt diesen Satz nach seinem Erfinder, dem griechischen Astronomen Ptolomäus, den ptolomäischen Satz.

III. Wenn man aus den Punkten A und B (Fig. 108) auf die gegenüberliegende Seite DC eines Parallelogrammes ABCD die Perpendikel AE und BF fällt, so geben die Dreiecke ADC und BDC:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 - 2\overline{DC} \times \overline{DE},$$

$$\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{DC}^2 + 2\overline{DC} \times \overline{CF}.$$

Addirt man diese Gleichungen und bemerkt, daß DE = CF und AB = DC, so erhält man

$$\overline{BD}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{DC}^2 + \overline{AB}^2.$$

In jedem Parallelogramm ist folglich die Summe der Quadrate der Diagonalen gleich der Summe der Quadrate der Seiten. Für das Rechteck ist dieser Satz von selbst einleuchtend.

IV. Leicht läßt sich beweisen, daß in jedem Viereck, welches sich um einen Kreis beschreiben läßt, je zwei gegenüberstehende Seiten gleiche Summen bilden; und umgekehrt, daß ein Viereck um einen Kreis beschrieben werden kann, wenn die gegenüberstehenden Seiten je zwei gleiche Summen bilden.

Von den ähnlichen Vielecken und der Kreislinie.

§. 89. Zwei Vielecke ABCDEF, abcdef (Fig. 118) nennt man ähnlich, wenn sie aus einer gleichen Anzahl ähnlicher und übereinstimmig liegender Dreiecke T und t, T′ und t′... zusammengesetzt sind.

Es ist leicht, über einer gegebenen Linie ab ein Vieleck abcd... zu construiren, welches einem gegebenen ABCD... ähnlich sei. Man bilde zuvörderst über der Linie ab ein dem Dreieck T ähnliches t, was keine Schwierigkeit darbietet, darauf über ac homolog zu AC ein dem Dreieck T′ ähnliches t′, u. s. w.

Aehnliche Vielecke haben ihre Winkel gleich und ihre homologen Seiten proportional. Da die Dreiecke T und t ähnlich sind, so sind ihre homologen Winkel gleich; man hat also B = b, BCA = bca, und ausserdem $\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \frac{AC}{ac}$. Aus eben der Ursache geben die Dreiecke T′ und t′ Winkel ACD = acd, und überdies $\frac{AC}{ac} = \frac{DC}{dc} = \frac{BC}{bc}$; hieraus folgt, daß der Winkel BCD = bcd. Auf eben diese Weise kann man mittelst der Dreiecke T″ und t″ beweisen, daß Winkel CDE = cde, und daß $\frac{CD}{cd} = \frac{DE}{de}$, u. s w.

Umgekehrt, die Polygone sind ähnlich, wenn ihre Winkel gegenseitig gleich und ihre homologen Seiten proportional sind, d. h. $\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \frac{CD}{cd} = \ldots$ Da, nach der Voraussetzung, B = b, und die diese Winkel einschließenden Seiten proportional sind, so sind die Dreiecke T und t einander ähnlich, mithin $\frac{BC}{bc} = \frac{AC}{ac}$ und Winkel BCA = bca. Wenn man die letztern bezüglich von BCD = bcd abzieht, so sind die Reste ACD und acd einander gleich. Da ferner nach der Voraussetzung $\frac{BC}{bc} = \frac{CD}{cd}$, so hat man wegen des gemeinschaftlichen Verhältnisses $\frac{BC}{bc}$ die Gleichung $\frac{AC}{ac} = \frac{CD}{cd}$; woraus folgt, daß die Dreiecke T′ und t′ ähnlich sind. Auf eben diese Art beweist man die Aehnlichkeit der übrigen Dreiecke.

1) Alle regelmäßigen Vielecke von derselben Seitenanzahl sind ähnliche Figuren, denn sie haben alle Winkel gleich und alle Seiten proportional.

2) Zwei Vielecke von n Seiten sind folglich ähnlich, wenn sie (n—1) auf einander folgende proportionale und gleich gegeneinander geneigte Seiten haben.

3) Wenn man durch die von zwei Winkelspitzen A nnd a (Fig. 119) gezogenen Diagonalen paarweise ähnliche Dreiecke erhält, so sind die Winkel der Polygone einzeln genommen gleich, und die homologen Seiten derselben proportional. Zieht man nun die Diagonalen von

zwei andern Winkelspitzen, wie z. B. E und e, so werden die die Polygone zusammensetzenden neuen Dreiecke ebenfalls ähnlich sein.

4) Zwei übereinstimmig liegende Diagonalen BE, be (Fig. 119) sind also zwei beliebigen homologen Seiten CD, cd porportional, d. h. $\frac{BE}{be} = \frac{CD}{cd}$.

5) Es seien ABCD.... und abcd.... (Fig. 119) zwei ähnliche Polygone. Nimmt man in denselben zwei homologe Seiten ED und ed, und verbindet alle Winkel mit den beiden Endpunkten jener Seiten, so sind die dadurch entstandenen Dreiecke EDF und edf, EDA und eda, EBD und ebd, u. s. w, paarweise ähnlich. Denn die Winkel der Polygone sind einzeln genommen gleich, und die homologen Diagonalen den Seiten proportional.

6) Die Construction der Pläne besteht in nichts Anderem, als in der Zeichnung der Polygone auf dem Papier, die denen ähnlich sind, welche auf dem Felde von solchen Punkten gebildet werden, deren gegenseitige Lage bestimmt ist. Man mißt deshalb auf dem Felde eine hinlängliche Anzahl von Seiten und Winkeln; construirt auf dem Papier alsdann andere Dreiecke, welche den auf dem Felde bestimmten ähnlich sind.

§. 90. Wenn man in zwei ähnlichen Vielecken (Fig. 119) zwei ähnlich liegende Geraden GH, gh zieht, d. h. welche in jedem Vieleck zwei homologe Seiten BC und FE, bc und fe in proportionale Theile schneiden; so sind diese Geraden GH, gh den homologen Seiten des Vielecks proportional, oder $\frac{GH}{gh} = \frac{BC}{bc}$, auch bilden sie mit diesen Seiten gleiche Winkel. Da man auf den Seiten BC und bc die Punkte H und h dergestalt angenommen hat, daß $\frac{HC}{hc} = \frac{CB}{cb} = \frac{CE}{ce}$, so sind, wenn man die Linien HE und he zieht, die Dreiecke HCE und hce ähnlich, weil die zwischen proportionalen Seiten liegenden Winkel HCE und hce gleich sind. Hieraus folgt, daß Winkel EHC $=$ ehc, und $\frac{EH}{eh} = \frac{HC}{hc} = \frac{BC}{bc}$. Erwägt man weiter, daß in ähnlichen Polygonen die Punkte G und g ebenfalls die Seiten FE und fe in proportionale Theile schneiden, so wird die Linie GH die nämliche Eigenschaft wie HE haben. Das Weitere ergibt sich von selbst.

§. 91. Von einem beliebigen Punkte O (Fig. 120) innerhalb eines Polygons ABCD.... ziehe man die Linien OA, OB.... nach den Scheiteln, A B, C...., und nehme auf diesen Linien Stücke an, welche den Längen jener Linien proportional sind, daß man also hat $\frac{OA}{Oa} = \frac{OB}{Ob} = \frac{OC}{Oc}$... Die Dreiecke OAB, Oab sind einander ähnlich und AB zu ab parallel; desgleichen die Dreiecke OBC, Obc, u. s. w. Hieraus ist ersichtlich, daß die Polygone ABC.... und abc.... ihre Seiten gegenseitig parallel und proportional haben, mithin einander ähnlich sind.

Nimmt man ebenso auf den Linien Oa, Ob... die Stücke OK, Ok den Seiten ae, AE, ferner OF, of den Seiten ab, AB proportional, u. s. w., so sind die Polygone KFG.... und kfg.... einander ähnlich, weil sie aus einer gleichen Anzahl ähnlicher, in derselben Ordnung folgender Dreiecke OKI und Oki, OKF und okf.... zusammengesetzt sind.

§. 92. Die Perimeter der Umfänge ähnlicher Vielecke verhalten sich wie die homologen Seiten oder Diagonalen derselben. Man hat (Fig. 118) $\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \frac{CD}{cd}$... Hieraus, nach §. 73 der Arithmetik

$$\frac{AB + BC + CD + \ldots}{ab + bc + cd \ldots} = \frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} \ldots\ldots = \frac{AC}{ac} = \ldots\ldots$$

Wendet man dies auf die regelmäßigen Vielecke von gleich viel Seiten an, so hat man $\frac{ABCD....}{abcd....} = \frac{AB}{ab} = \frac{OB}{Ob} = \frac{OI}{Oi}$ (Fig. 121), weil die Dreiecke OBI und Obi ähnlich sind, indem sie die Winkel bei O gleich haben. Die Umfänge der regelmäßigen Vielecke von gleicher Seitenzahl verhalten sich also wie die Halbmesser der umschriebenen oder eingeschriebenen Kreise.

§. 93. Der Umkreis ist die gemeinschaftliche Grenze der Umfänge der eingeschriebenen und umschriebenen Vielecke. (Siehe Algebra §. 22). Da jede Seite AB (Fig. 122) des eingeschriebenen regelmäßigen Vielecks kürzer als der von ihr bespannte Bogen ACB ist, so ist einleuchtend, daß der rectificirte Umkreis länger als der Umfang jedes eingeschriebenen Vielecks ist. Wenn man nun den Bogen BCA in C halbirt und die Sehnen CA und CB zieht, so hat man $AB < AC + CB$, was uns offenbar zeigt, daß durch Verdoppelung der Seiten-

zahl des eingeschriebenen Polygons der Umfang desselben immer mehr und mehr dem Umkreise sich nähert, ohne jedoch aufzuhören, kleiner als solcher zu sein.

Anderseits ist der Bogen CAL $<$ CE + EL (§. 19), woraus hervorgeht, daß der Umfang jedes umschriebenen Polygons größer als der Umkreis ist. Die Tangente AK ist die halbe Seite des umschriebenen Polygons von einer doppelt so großen Anzahl Seiten als das, zu welchem CE als halbe Seite gehört (§. 83).

Ferner ist AK, senkrecht auf AO, $<$ KE, mithin AK + KC $<$ EC. Verdoppelt man also die Seitenzahl eines umschriebenen Polygons, so rückt sein Umfang dem Umkreise immer näher, ohne jedoch aufzuhören, solchen an Größe zu übertreffen.

Bezeichnet man nun mit P den Umfang eines umschriebenen regelmäßigen Vielecks, mit p den des eingeschriebenen regelmäßigen Vielecks von gleicher Seitenzahl, mit R und r die Radien OC, OI der eingeschriebenen Kreise: so hat man $\frac{P}{p} = \frac{R}{r}$, woraus folgt $P - p = \frac{P}{R}(R - r)$. Da P stets abnimmt, indem es dem Umkreis näher kommt, R constant bleibt, R — r oder CI fortwährend kleiner wird, wenn man nach und nach die Seitenzahl der Polygone verdoppelt: so kann der Unterschied P — p zwischen beiden Umfängen so klein werden, als man nur immer will, d. h. diese Umfänge nähern sich immer mehr und mehr dem Umkreise, der fortwährend zwischen beiden liegt, und ihnen niemals genau gleich ist.

§. 94. Die Umfänge der Kreise verhalten sich wie ihre Halbmesser oder Durchmesser. Wir bezeichnen durch C und c die Umfänge, deren Radien BO = R und bO = r (Fig. 121) sind; durch P und p die Umfänge zweier eingeschriebenen regelmäßigen ähnlichen Vielecke ABC... und abc...; durch Z und z endlich den Unterschied zwischen dem Umfang jedes Vielecks und der Peripherie des dazu gehörigen umschriebenen Vielecks. Wir haben dann $\frac{P}{p}$ oder $\frac{R}{r} = \frac{C-Z}{c-z}$, woraus $\frac{C}{R} - \frac{Z}{R} = \frac{c}{r} = \frac{z}{r}$. Da nun R, C, r und c unveränderlich sind, Z und z mit der Zahl der Seiten sich ändern, und auf jeden beliebigen Grad von Kleinheit gebracht werden können,

so hat man, vermöge des §. 22 der Algebra, $\frac{C}{R} = \frac{c}{r}$, oder $\frac{C}{c} = \frac{R}{r} = \frac{2R}{2r}$.

§. 95. Eine gerade Linie zu finden, die einem gegebenen Umkreis an Länge gleich sei, oder diese Curve zu rectificiren. Bezeichnen wir durch C und c zwei Kreisperipherien, durch R und r ihre Radien, so haben wir $\frac{C}{2R} = \frac{c}{2r}$; woraus hervorgeht, daß das Verhältniß des Umkreises zum Durchmesser in allen Kreisen das nämliche ist. Stellt man dies Verhältniß durch π dar, so ist der Umkreis, dessen Radius R ist, durch $2\pi R$ ausgedrückt, vermittelst welcher Formel man den Umkreis berechnen könnte, wenn π bekannt wäre. Um das constante Verhältniß des Umkreises zu bestimmen, muß man die rectificirte Länge irgend eines Umkreises finden, und solche durch die Länge des Durchmessers dividiren; der Quotient wird die Zahl π sein. Um dahin zu gelangen, verfahren wir wie folgt: Wir nehmen ein beliebiges regelmäßiges Polygon, dessen Umfang gegeben ist, an; es sei r der Radius des dazu gehörigen eingeschriebenen, und R der des dazu gehörigen umschriebenen Kreises. Alsdann denken wir uns ein anderes isoperimetrisches regelmäßiges Vieleck, d. h. ein solches, welches mit dem vorigen einen gleichen Umfang hat; und stellen nun die Aufgabe, sowohl den Radius r′ des eingeschriebenen, als den Radius R′ des umschriebenen Kreises dieses letztern Vielecks zu berechnen.

Es sei BE = a (Fig. 123) deshalb die Seite unseres gegebenen Polygons, HD ein senkrechter Durchmesser, C der Mittelpunkt des Kreises EBD, CA = r der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises, CB = R der Radius des umschriebenen Kreises. Wir ziehen die Geraden ED, DB, fällen aus C auf die Sehne DE die Linien CG senkrecht, welche jene in ihre Mitte G trifft; durch den Punkt G legen wir GI parallel mit BE, hiernach IG gleich der Hälfte von BE. Da der Winkel EDB die Hälfte von ECB ist, so wird der Winkel EDB der Mittelpunktswinkel, und GI die Seite des regelmäßigen Vielecks, das doppelt so viel Seiten hat, sein. Alsdann ist DF = r′ der Radius des diesem Vielecke eingeschriebenen Kreises, und DG = R′ der des ihm umgeschriebenen Kreises. Es kommt also blos darauf an, R′ und r′ zu bestimmen. Hierzu hat man erstens: DF = $\frac{1}{2}$DA

$= \frac{1}{2}(DC + CA)$, oder $r = \frac{1}{2}(R + r)$. Zweitens hat man in dem rechtwinkligen Dreieck CGD: $DG^2 = DC \times DF$ (§. 67), oder $R'^2 = Rr'$; die Aufgabe wäre also gelöst. Nimmt man diese Rechnung mit dem neuen Vieleck IG, wie mit dem ersten BE vor, so wird man die entsprechenden Radien r'' und R'' des isoperimetrischen regelmäßigen Vielecks, das doppelt so viel Seiten als das vorhergehende hat, erhalten. Setzt man diese Rechnung so fort, so findet man eine Reihe von Zahlenresultaten r, R, r', R', r'', R''...., worin jedes r das arithmetische Mittel, und jedes R das geometrische Mittel zwischen den beiden unmittelbar vorhergehenden Gliedern ist. Wir haben demnach die Werthe für die Radien der eingeschriebenen und umschriebenen Kreise zu einer Reihe von isoperimetrischen regelmäßigen Vielecken, deren Seitenzahl beständig verdoppelt wird. Da F die Mitte von AD macht, so ist AF oder $DF > AC$, oder $r' > r$. Ferner ist die Hypothenuse $DC > DG$, oder $R > R'$. Die Größen r, r', r''... nehmen also zu, die Größen R, R', R''.... dagegen ab; und es kann die Differenz dieser Größen kleiner als jede gegebene Größe werden, wenn man die Zahl der Seiten nur groß genug nimmt. Denn man hat $BC^2 - CA^2 = BA^2$, oder $R^2 - r^2 = \frac{a^2}{4}$, folglich $R - r = \frac{a^2}{4(R+r)}$ $= \frac{a^2}{8r'}$, wo a so klein werden kann, als man nur will, während r' beständig wächst. Hieraus erhellet, daß der Umfang des Vielecks sich fortwährend der Form eines isoperimetrischen Kreisumfanges nähert, dessen Radius zwischen den Radien der eingeschriebenen und umschriebenen Kreise der successiven Vielecke liegt. Hat man die Berechnung der Werthe von r und R bis auf 10 Decimalziffern z. B. fortgesetzt, so findet man endlich zwei Radien, deren zehn erstere Ziffern in beiden einerlei sind. Der Abstand des isoperimetrischen Polygons von den beiden zugehörigen Umkreisen kann hiernach bei dem vorliegenden Grad von Genauigkeit als Null, der Umfang dieses Polygons daher als genäherter Werth dieser Umkreise gelten.

Es sei also a die Seite des ersten Polygons von n Seiten, mithin na der Umfang desselben, so wie der aller successiven Vielecke. Bezeichnet nun x den Radius des eingeschriebenen und umschriebenen Kreises bei dem gewählten Grad von Genauigkeit, oder den genäherten Werth für den Umkreis von der bestimmten Länge na, so hat man $na = 2\pi x$, woraus $\pi = \frac{na}{2x}$.

Wählen wir das eingeschriebene regelmäßige Sechseck als Beispiel, so ist, wenn a = 1 die Seite bezeichnet, der Umfang desselben, so wie der aller successiven Vielecke und des Kreises = 6. Ferner ist R = 1, und $r = \sqrt{(OB^2 - IB^2)}$ (Fig. 122), oder $r = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Wir erhalten nach und nach folgende Resultate:

r = 0,866025404	0,953565731	0,954908353
R = 1	0,955611769	0,954940311
r′ = 0,933012702	0,954588750	0,954924332
R′ = 0,965925826	0,955100122	0,954932322
r″ = 0,949469264	0,954844436	0,954928327
R″ = 0,957662197	0,954972270	0,954930325

Sobald man zu zwei successiven fast gleichen Radien x gelangt ist, so drückt eine solche Zahl den genäherten Werth des Radius für den isoperimetrischen Kreisumfang, der $6 = 2\pi x$ ist, aus. Hiernach hat man x = 0,954929662; folglich $\pi = 3{,}141592654$. Man kann also auf diese Weise den Werth von π bis auf jeden beliebigen Grad von Genauigkeit bestimmen. Wir werden übrigens später bequemere Mittel zur Bestimmung dieses Näherungswerthes kennen lehren. Man findet

$$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327 9.$$

$$\log.\pi = 0{,}49714987269413385435126828829 1.$$

Setzen wir in der Gleichung Umkreis $= 2\pi R$ nach einander $R = \frac{1}{2}$ und R = 1, so kommt Umkreis $= \pi$, und $\frac{1}{2}$ Umkreis $= \pi$. Das constante Verhältniß zu seinem Durchmesser drückt also auch den Umkreis, dessen Durchmesser 1 ist, aus, desgleichen den halben Umkreis, dessen Radius 1 ist.

Bleibt man bei dem Werth von $\pi = 3{,}142$ stehen, so findet man $\pi = \frac{22}{7} = 3\frac{1}{7}$. Man wendet dies einfache Resultat, welches wir dem großen Archimed verdanken, in den Künsten an. Adrian Metius fand, indem er bis 3,141593 ging, $\pi = \frac{355}{113}$, eine insofern merkwürdige Zahl, daß ihre Glieder aus den drei ersten ungeraden Zahlen (113, 355), jede zweimal genommen, besteht. Dieses Resultat, in welchem noch die sechste Stelle richtig ist, liefert nicht einmal einen Fehler von einem Centimeter bei einem Kreise von 18000 Meter im Radius (1 Linie auf 24000 Fuß im Halbmesser).

Wir theilen hier eine genäherte graphische Rectification des Kreisumfanges mit. Es ist bewiesen, daß die Seite des eingeschriebenen Quadrats $= r\sqrt{2}$, die des eingeschriebenen gleichseitigen Dreiecks $= r\sqrt{3}$.

Die Summe dieser Linien ist $r(\sqrt{2}+\sqrt{3}) = r \times 3{,}14627$, beträgt demnach bis auf ein halbes Hundertel genau den rectificirten halben Umkreis. Hat man also in einem gegebenen Kreis das Quadrat und das gleichseitige Dreieck eingeschrieben, so braucht man nur die Seite der einen Figur zu der Seite der andern zu addiren, um eine dem halben Umkreise nahe kommende Länge zu erhalten.

Zur Berechnung des Durchmessers d eines Kreises aus seinem Umfang c hat man die Formel $d = \frac{1}{\pi} c = kc$, wo $k = \frac{1}{\pi} = 0{,}31831...$

$\log.k = 0{,}50285013 - 1.$

Macht der Bogen ACB (Fig. 122) den nten Theil des Umkreises, oder der Winkel O den nten Theil von 4R, α die Zahl seiner Grade; so hat man, wenn z die Länge des Bogens darstellt,

$$z = \frac{\pi r \alpha}{180} = \frac{2\pi r}{n} = k' r \alpha,$$

wenn man $\log.k' = 0{,}24187737 - 2$ setzt.

Anmerkung. Ludolph von Cöln hat nach der in den Noten mitgetheilten, schon von Archimed angewandten Methode die ersten 35 Decimalstellen der Zahl π berechnet, weshalb sie gewöhnlich die Ludolphsche Zahl genannt wird.

Man hat die Rechnung bis auf 140 Decimalstellen fortgesetzt und untersucht, ob sich die Verhältnißzahl π nicht genau durch zwei Zahlen ausdrücken lasse; es ist jetzt erwiesen, daß π eine Irrationalzahl ist.

Zweites Kapitel.

Von den Flächenräumen.

Vom Flächeninhalt der Vielecke und des Kreises.

§. 96. Unter Flächeninhalt einer Figur wird der Theil der Flächenausdehnung verstanden, der zwischen den diese Figur begrenzenden Linien enthalten ist. Zwei Figuren von sehr verschiedener Gestalt können gleichen Flächeninhalt haben.

Zwei Rechtecke AEFD, aefd (Fig. 124) sind einander in allen Stücken gleich, wenn ihre Grundlinien und Höhen gegenseitig gleich sind, oder AD = ad und AE = ae. Man sieht in der That, daß beide Figuren auf einander gelegt sich decken. Vergleicht man dagegen das Parallelogramm ABCD mit dem Rechteck AEFD, so findet man, daß diese Figuren nur von gleichem Flächeninhalt sind, weil das Dreieck AEB = DFC ist.

Die Parallelogramme ABCD, abcd von gleicher Grundlinie und Höhe sind von gleichem Flächeninhalt, weil sie mit den gleichen Rechtecken ADFE, adfe einerlei Flächeninhalt haben.

Es sei das Dreieck ABC (Fig. 125) vorgelegt. Wenn man die Linien CD und BD den Seiten AB und AC parallel legt, so entstehen die gleichen Dreiecke ACB, ACD. Jedes Dreieck ist demnach die Hälfte eines Parallelogramms von gleicher Grundlinie und Höhe. Alle Dreiecke, welche einerlei Basis AB und ihre Scheitel auf der zu AB parallelen Linie CF liegen haben, sind demnach von gleichem Flächeninhalte.

§. 97. Wir wollen jetzt zwei beliebige Parallelogramme mit einander vergleichen.

1) Rechtecke von einerlei Grundlinie verhalten sich wie ihre Höhen. Die Höhen AD = H und ad = h der beiden Rechtecke ABCD = R und abcd = r (Fig. 126) können entweder commensurabel oder incommensurabel sein. Im ersten Falle sei ihr gemeinschaftliches Maß ax mmal in H und nmal in h enthalten, so daß man hat $\frac{H}{h} = \frac{m}{n}$.

Wenn man durch die Theilungspunkte x, x', y, y' .... Parallelen zu der Grundlinie zieht, so theilt man das Rechteck R in m und das Rechteck r in n einander gleiche Rechtecke. Man hat also $\frac{R}{r} = \frac{m}{n}$, woraus $\frac{R}{r} = \frac{H}{h}$.

Wenn die Höhen incommensurabel sind, so theilen wir ebenso AD in gleiche Theile Ax', x'y' ..., und tragen dann einen davon auf ad nach xa, xy ...; der nächst an d liegende Theilungspunkt sei i. Ziehen wir durch diesen Punkt zu dc die Parallele il, so wird man das

Rechteck ailb bilden, für welches, weil die Höhen H und ai der Construction zufolge commensurabel sind, man hat $\frac{\text{Rechteck al}}{R} = \frac{ai}{H}$

oder $\frac{r}{R} + \frac{\text{Rechteck dl}}{R} = \frac{h}{H} + \frac{id}{H}$.

Da das Rechteck dl und die Linie id auf jeden beliebigen Grad von Kleinheit gebracht werden können, die Größen r, R, h und H überdies unveränderlich sind, so ist $\frac{r}{R} = \frac{h}{H}$.

Anmerkung. Man kann AD und ad als die Grundlinien der beiden Rechtecke betrachten, und AB und ab als ihre Höhen; es verhalten sich hiernach zwei Rechtecke von einerlei Höhe wie ihre Grundlinien.

2) Rechtecke verhalten sich zu einander wie die Produkte ihrer Grundlinie und Höhe.

Es seien AC = R und ac = r zwei Rechtecke (Fig. 127), deren Grundlinien AB = B und ab = b sind. Legt man das eine Rechteck auf das andere, indem man einen rechten Winkel der einen Figur mit einem der andern zum Decken bringt; so bildet man die Rechtecke AK = r und AH = R′. Die Basis AB (B) von R′ ist einerlei mit der von R, die Höhe AI (h) von R′ dagegen einerlei mit der von r. Man hat folglich nach dem vorhergehenden Lehrsatz:

$$\frac{R}{R'} = \frac{H}{h}, \quad \frac{R'}{r} = \frac{B}{b}; \quad \text{woraus } \frac{R}{r} = \frac{B \cdot H}{b \cdot h}.$$

3) Die nämlichen Lehrsätze gelten auch für die Parallelogramme, da jedes Parallelogramm einem Rechteck gleich ist, welches mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe hat. Parallelogramme stehen also in dem Verhältniß der Produkte ihrer Grundlinien und Höhen zu einander.

§. 98. Eine Fläche messen heißt: untersuchen, wie oft solche eine andere als Einheit angenommene Fläche enthält. Um das Rechteck ABCD (R) zu messen (Fig. 128), nehmen wir das Rechteck abcd (r) als Flächeneinheit an. Da $\frac{R}{r} = \frac{B}{b} \cdot \frac{H}{h}$, so trägt man die Basis ab auf die Basis AB, um zu sehen, wie viel Mal die eine in der andern enthalten ist; thut ein Gleiches mit der Höhe ad, AD: multiplicirt darauf diese beide Anzahl mal in einander. In der Figur

ist ab in AB 3 mal und ad in AD 4 mal enthalten, man hat demnach $R = 12r$, weil $3 \times 4 = 12$.

Da die Grundlinien und Höhen nicht eine genaue Anzahl mal in einander enthalten sein können, so versteht man im Allgemeinen unter dem Maß einer Fläche ABCD das Verhältniß derselben zu einer als Einheit angenommenen Fläche abcd (Fig. 127). Dieses Maß ist hiernach das Produkt des Verhältnisses $\frac{B}{b}$ ihrer Grundlinie aus dem $\frac{H}{h}$ ihrer Höhen. Es findet dasselbe für jedes Parallelogramm statt. Hieraus schließen wir, wenn l die abstracte Zahl $\frac{B}{b} \times \frac{H}{h}$ darstellt, daß der Flächeninhalt des Parallelogramms lmal den der Flächeneinheit beträgt.

Nimmt man zur Flächeneinheit das Quadrat abcd (Fig. 128), dessen Seite gleich der Längeneinheit ist, so hat man $b = h = 1$; woraus $R = BH$. Hier drückt BH das abstracte Produkt aus den Zahlen der Längeneinheiten aus, welche auf die Grundlinie B und die Höhe H gehen. Ist dieses Produkt $BH = l$, so hat man die Gleichung R = lmal dem als Flächeneinheit angenommenen Quadrat. Der Flächeninhalt eines Parallelogramms ist also das Produkt, welches gebildet wird, wenn man die Anzahl der in seiner Grundlinie und in seiner Höhe enthaltenen Längeneinheiten in einander multiplicirt. Man drückt dies kurz, wiewohl unrichtig, so aus: Der Flächeninhalt eines Parallelogramms ist gleich dem Produkte seiner Grundlinie in seine Höhe.

Das Maß des Flächeninhalts eines Rechtecks (Fig. 110), dessen Seiten einander gleich sind, ist $BC \times BC$; d. h. der Flächeninhalt eines Quadrats wird durch die zweite Potenz seiner Seite gemessen. Es ist dies die Ursache, warum man die zweite Potenz einer Zahl auch ihr Quadrat nennt.

§. 99. Alles was wir früher vom Produkt der auf Zahlen gebrachten Linien gesagt haben, läßt sich jetzt auch von Rechtecken, deren Seiten als Factoren vorkommen, aussagen. So z. B. kann der Lehrsatz in §. 75 auf folgende Art ausgedrückt werden: Das über der Tangente construirte Quadrat ist von gleichem Flächeninhalte mit demjenigen Rechtecke, das zur Basis die ganze Secante und das auffer-

halb liegende Stück derselben zur Höhe hat; und so mit den übrigen Sätzen.

Der wesentliche Charakter einer geometrischen Beweisart besteht darin, die strenge Schlußfolge mit der den Grundsätzen eigenthümlichen Klarheit zu verbinden. Niemals dürfen hier die zu vergleichenden Gegenstände aus dem Auge verloren werden. Da jene Lehrsätze mit Hülfe von Rechnungen gefunden wurden, die sich auf die Theorie der Proportionallinien stützen, so wollen wir einen direkten Beweis von einigen auf die Flächenräume Bezug habenden Fundamentalsätzen mittheilen. Die übrigen Sätze lassen sich dann ohne Mühe daraus ableiten, wie man sich leicht überzeugen kann, wenn man sie einzeln vornimmt.

I. Man construire über der Linie $AC = AB + BC$ (Fig. 129) die Quadrate AF und AI. Offenbar ist die Fläche $AI = AF + FI + EH + CF = AF + FI + 2 \cdot CF$, weil die Rechtecke EH und CF einander gleich sind. Da nun AF das Quadrat von AB und FI das von BC ist, so findet man den Satz $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ wieder, wo a und b Linien, a^2, b^2, ab Flächen darstellen.

Desgleichen hat man Fläche $AF = AI + FI - 2EI$, weil $BD = BI - FI$, und $EI = BI$. Man erhält hiernach den Satz: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

II. Es sei das in A rechtwinklige Dreieck ABC (Fig. 130) vorgelegt. Man construire über seinen drei Seiten die Quadrate BF, BG, AE; ziehe darauf die Linien AF, BE und die Senkrechte AL auf die Hypothenuse. Die Dreiecke ACF, BCE sind einander gleich, weil der aus dem rechten Winkel BCF und dem Winkel BCA zusammengesetzte Winkel dem aus dem rechten Winkel ACE und dem Winkel BCA zusammengesetzten Winkel gleich ist, und weil die Seiten BC und CF, AC und CE paarweise als Seiten eines und desselben Quadrats gleich sind. Das Dreieck ACF ist aber die Hälfte des Rechtecks CL, weil es mit einerlei Grundlinie CF und der Scheitel A auf der Linie DL parallel zu CF liegt. Aus ähnlichem Grunde ist das Dreieck BCE die Hälfte des Quadrats AE. Es ist demnach das Rechteck CL von gleichem Flächeninhalt mit dem Quadrat AE. Ebenso läßt sich zeigen, daß das Rechteck BL und das Quadrat BG einerlei Flächeninhalt haben. Es muß mithin Rechteck BL + Rechteck LC oder Quadrat BF = Quadrat AE + Quadrat BG, oder $a^2 = b^2 + c^2$ sein: d. h. das über der Hypothenuse construirte Qua-

drat ist gleich der Summe der über den beiden Katheten construirten Quadrate.

Die Rechtecke CL und BF haben einerlei Höhe, sie verhalten sich also wie ihre Grundlinien DC und BC. Man hat hiernach $\frac{\text{Fl. CL oder CI}}{\text{Fl. BF}} = \frac{\text{CD}}{\text{BC}}$. Man hat ferner $\frac{\text{Fl. BG}}{\text{Fl. BF}} = \frac{\text{BD}}{\text{BC}}$, und $\frac{\text{Fl. AE}}{\text{Fl. BG}} = \frac{\text{CD}}{\text{BD}}$. Diese Sätze kommen auf die im §. 67 zurück.

III. Ist das Dreieck ABC (Fig. 131) nicht rechtwinklig, und der Winkel A ein spitzer, so mache man die nämliche Construction wie vorhin; fälle aus diesen Scheiteln B und C auf die gegenüberliegenden Seiten die Senkrechten BK und CM. Es läßt sich auf dieselbe Art wie im vorhergehenden Satze zeigen, daß die Dreiecke ACF, BCE einander gleich sind, mithin die Rechtecke CL, CK, welche das Doppelte jener Dreiecke machen, gleichen Flächeninhalt haben. Folglich Rechteck CL = CK = AE — AK (I). Ferner Rechteck BL = BM = BG — MA (II). Die ähnlichen rechtwinkligen Dreiecke BAI, AOC geben aber $\frac{\text{AI}}{\text{AO}} = \frac{\text{AB}}{\text{AC}}$, woraus AI · AC = AO · AB, oder Rechteck AK = AM. Addirt man jetzt die beiden Gleichungen (I) und (II), so kommt BF = AE + BG — 2 · AK, oder $a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot AI$ (§. 68).

IV. Ist der Winkel BAC ein stumpfer (Fig. 132), so gibt dieselbe Construction abermals Dreieck BCE = CAF. Hiernach Rechteck CL = CK = AE + AK. Ebenso ist BL = BG + AK. Durch Addition dieser beiden Gleichungen erhält man BF = AE + BG + 2AK, oder $a^2 = b^2 + c^2 + 2b \cdot AI$ (§. 68).

§. 100. **Die Seite desjenigen Quadrats, das mit einem gegebenen Parallelogramm gleichen Flächeninhalt hat, ist mittlere Proportionale zwischen der Grundlinie und der Höhe dieses Parallelogramms.** Denn ist b die Basis, h die Höhe dieses Parallelogramms, so hat man $x^2 = bh$. **Um also ein gegebenes Parallelogramm zu quadriren, oder in ein gleich großes Quadrat zu verwandeln,** trage man die Basis und die Höhe dieses Parallelogramms (Fig. 92) von B nach C, und von B nach D; beschreibe dann über BC als Durchmesser einen Halbkreis BAC, der die aus dem Punkte

D auf BC errichtete Senkrechte DA in A schneidet; die Sehne BA wird die Seite des gesuchten Quadrats sein.

Ist die gegebene Figur ein Rechteck CL (Fig. 130), so nimmt man BC = DL; das Quadrat CI ist dann gleich dem Rechteck CL.

§. 101. Der Flächeninhalt eines Dreiecks wird durch die Hälfte des Produkts aus seiner Grundlinie b und Höhe h oder durch $\frac{1}{2}$hb gemessen, weil ein Dreieck die Hälfte eines Rechtecks ist, das mit ihm gleiche Höhe und Grundlinie hat.

1) Das Quadrat, welches mit einem gegebenen Dreieck einerlei Flächeninhalt hat, ist hiernach $x^2 = \frac{1}{2}bh$. Um also ein Dreieck in ein Quadrat zu verwandeln, muß man zwischen der Höhe und der halben Grundlinie die mittlere Proportionale suchen; d. h. (Fig. 130) BD gleich der halben Grundlinie, und BC gleich der Höhe nehmen, und die Construction wie vorhin ausführen. BG wird das gesuchte Quadrat sein.

2) Die Dreiecke ABF, BIC (Fig. 133), welche einerlei Höhe haben, verhalten sich wie ihre Grundlinien AF, IC. Um also ein gegebenes Dreieck ABC in zwei Theile zu theilen, welche in einem bestimmten Verhältnisse zu einander stehen, ist es hinreichend, die Grundlinie AC in F nach jenem Verhältnisse zu theilen, und die Linie BF zu ziehen.

§. 102. Es sei das Vieleck ABDC.... (Fig. 134) vorgelegt. Man ziehe die Linie AD und lege mit ihr durch B die Linie BC parallel, welche die verlängerte ED im Punkt C trifft. Wird dieser Punkt C mit A verbunden, so bildet man das dem Sechseck ABDEFG gleiche Fünfeck ACEFG. Um sich hiervon zu überzeugen, erwäge man, daß die Dreiecke ABD und ACD gleichen Flächeninhalt haben. Wenn man am Fünfeck eine der vorhergehenden ähnliche Construction verrichtet, so kann man es in ein ihm gleiches Viereck verwandeln, was sich dann in ein Dreieck von gleichem Inhalt, und dies endlich in ein Quadrat verwandeln läßt. Man kann folglich jedes Vieleck in ein ihm gleich großes Dreieck oder Quadrat verwandeln.

§. 103. Der Flächeninhalt eines Vielecks wird gefunden, wenn man es in Dreiecke zerlegt und den Flächeninhalt eines jeden derselben sucht. Der Flächeninhalt eines regelmäßigen Vielecks

ABCD.... (Fig. 112) wird gemessen durch die Hälfte des Produktes aus seinem Umfang in den Halbmesser OG des eingeschriebenen Kreises, welcher Halbmesser auch Apothem genannt wird. Denn nimmt man das Dreieck AOB so oft, als das Vieleck Seiten hat, so erhält man, wenn n diese Zahl darstellt, $n \times AB \times \frac{1}{2} OG = \text{Perimeter} \times \frac{1}{2} . OG$.

§. 104. Der Flächeninhalt des Trapezes AHah (Fig. 82) hat zu seinem Maß das Produkt aus seiner Höhe in die halbe Summe der parallelen Seiten, oder in die von beiden parallelen Seiten gleich weit abstehende Linie. Denn zieht man AC zu ah parallel und die Linie Ee durch die Mitten von AH und ah, so ist Ee parallel zu Hh. Das Maß des Flächeninhalts des Parallelogramms ACha ist nun das Produkt aus seiner Höhe in die Linie Ch oder Be; und das Maß des Flächeninhalts des Dreiecks AHC ist das Produkt aus der nämlichen Höhe in die halbe Linie CH oder EB. Der Flächeninhalt des Trapezes wird daher gemessen durch das Produkt aus dieser gemeinschaftlichen Höhe in die Linie Ee, welche so viel als $\frac{1}{2}(Aa + Hh)$ macht.

Anmerkung. Der Flächeninhalt eines Vielecks läßt sich öfters durch Trapeze auf kürzere Weise finden, als durch Dreiecke nach dem im §. 103 gegebenen Verfahren. Es geschieht dies dann auf folgende Art: Man zieht eine beliebige Gerade, fällt Perpendikel auf dieselbe aus den Scheiteln des zu berechnenden Polygons. Hierdurch wird solches in Trapeze und rechtwinklige Dreiecke zerlegt, welche einzeln berechnet werden müssen.

§. 105. Der Flächeninhalt des Trapezes ABba (Fig. 112) ist $= \frac{1}{2} Gg\ (AB + ab)$. Wenn man AB und ab durch die Seitenzahl der regelmäßigen Polygone ABCD...., abcd.... multiplicirt, so erhält man ihre Umfänge P und p. Der Unterschied ihrer Flächeninhalte ist folglich $= \frac{1}{2} Gg\ (P + p)$. Da Gg fortwährend abnimmt, je größer die Anzahl der Seiten wird, und überdies $\frac{1}{2}(P + p)$ sich immer mehr und mehr dem Umkreise nähert; so kann dieser Unterschied so klein, als man nur immer will, werden. Der Flächeninhalt des Kreises ist demnach die Grenze der Flächeninhalte der eingeschriebenen und umschriebenen regelmäßigen Polygone.

Der Flächeninhalt C eines Kreises hat zu seinem Maß das halbe Produkt aus dem Umkreis in den Halbmesser, oder $\frac{1}{2}pr$, wenn der Umkreis mit p und der Halbmesser mit r bezeichnet wird. Es sei α der Unterschied zwischen dem Flächeninhalt des umschriebenen Polygons und dem des Kreises, p der Umkreis, und β der Unterschied zwischen demselben und dem Perimeter des Polygons. Man erhält nach §. 103 für den Flächeninhalt dieses Polygons die Gleichung $C + \alpha = \frac{1}{2}r(p+\beta)$. Da die veränderlichen Größen α und β kleiner als jede noch so kleine Größe werden können, so findet zwischen den unveränderlichen Gliedern die Gleichung $C = \frac{1}{2}pr$ statt. (S. niedere Algebra §. 22.)

Weil $p = 2\pi r$, so findet man auch $C = \text{Umkreis} \times \frac{1}{2}r = \pi r^2$, woraus folgt, daß der Flächeninhalt eines Kreises auch gefunden wird, wenn man das Quadrat seines Halbmessers durch die Zahl multiplicirt, welche das Verhältniß des Umkreises zum Durchmesser angibt. Stellt d den Durchmesser dar, so hat man Kreisfläche $= \frac{1}{4}\pi d^2$, oder beinahe $= d \times \frac{7}{9}d$. Ist der Flächeninhalt C eines Kreises gegeben, so findet man den dazu gehörigen Radius mittelst der Formel $r =$

$$\sqrt{\frac{C}{\pi}} = \sqrt{kC}; \text{ wo } k = \frac{1}{\pi} = 0{,}31831; \log.k = 0{,}50285013 - 1.$$

Der Kreis ist demnach so groß als ein Rechteck, dessen Grundlinie dem rectificirten halben Umkreise und dessen Höhe dem Halbmesser gleich ist. Man hat also hiernach eine annähernde Auflösung des berühmten Problems über die Quadratur des Kreises. Um dasselbe vollständig aufzulösen, was von keinem sonderlichen Nutzen wäre, müßte man vorerst den genauen Werth von π gefunden haben.

§. 106. Der Flächeninhalt eines Kreisausschnitts AOBI (Fig. 135) hat zu seinem Maß das halbe Produkt aus dem Halbmesser in den Bogen AIB. Wenn man aus dem Mittelpunkt O über OA die Senkrechte OD errichtet, so wird sich der Flächeninhalt des Ausschnitts AOBI zu dem des Ausschnitts AODI verhalten, wie der Bogen AIB zum Bogen AID. Diese Proportion gibt $\text{AOBI} = \text{Kreisfläche} \times \frac{\text{AIB}}{\text{Umkreis}} = \frac{1}{2}r \times \text{AIB}$. Beträgt der Bogen AIB den nten Theil des Umkreises, und α die Zahl seiner Grade,

so erhält man für den Kreisausschnitt $= \frac{\pi r^9}{n} = \frac{\pi r^2 \alpha}{360} = hr^2\alpha$, wo log. h $= 0{,}9408473 - 3$.

Der Flächeninhalt des Kreisabschnitts ALBI wird gefunden, wenn man vom Flächeninhalt des Ausschnittes den des Dreiecks OAB abzieht.

Anmerkung. Der Flächeninhalt eines solchen Abschnitts hat zum Maß die Hälfte des Produkts des Unterschiedes zwischen dem Bogen AIB und der aus B auf den Halbmesser OA gefällten Senkrechten in den Halbmesser AO.

Wenn wir zu den ähnlichen, concentrischen Bogen ABD, abd (Fig. 168) regelmäßige Polygonstücke umschreiben, so wird die Summe der dadurch entstandenen Trapeze eine Fläche bilden, deren Grenze das Kreistrapez ADBabd ist. Es läßt sich leicht beweisen, daß das zwischen zwei concentrischen Bogen enthaltene Flächenstück ABDabd ausgedrückt wird durch das Produkt aus der Entfernung Aa dieser Bogen in ihre halbe Summe. Beschreibt man durch die Mitte a′ von aA aus S als Mittelpunkt mit Sa′ den Bogen a′d′, so hat man $\frac{abd + ABD}{2} = a'b'd'$. Folglich wird das Kreistrapez auch gemessen durch das Produkt $Aa \times a'b'd'$.

Man kann irgend eine krummlinige Figur näherungsweise dadurch berechnen, daß man sie als ein Vieleck mit sehr kleinen Seiten betrachtet, und sie in Dreiecke und Trapeze zerlegt. Hätten wir z. B. den Flächeninhalt der Figur aADd (Fig. 162) zu bestimmen, so würden wir die gleichweit von einander abstehenden Parallelen Aa, Ii, Bb, Kk.... Dd ziehen, welche wir durch p', p''.... $p^{(n)}$ darstellen wollen. Durch die auf Aa beliebig errichtete Senkrechte a′d′ wird die vorliegende Fläche in Trapeze zerlegt, deren Flächen $\frac{1}{2}(p'+p'')k$, $\frac{1}{2}(p''+p''')k$.... sind, wo k den Abstand von zwei Parallelen bezeichnet. Die Summe dieser Trapeze ist $= k(\frac{1}{2}p'+p''+p''' \ldots . + \frac{1}{2}p^{(n)})$. Das krummlinige Flächenstück hat folglich zum Maß das Produkt aus der Entfernung k zwischen zwei Parallelen in ihre um die Hälfte der beiden äussersten verminderten Summe.

Vergleichung der Flächenräume.

§. 107. Wir wollen jetzt die Flächeninhalte ähnlicher Polygone miteinander vergleichen.

I. Die Flächeninhalte ähnlicher Dreiecke ABC, abc (Fig. 136) verhalten sich wie die Quadrate ihrer homologen Seiten. Die Aehnlichkeit der Dreiecke gibt $\frac{AB}{ab} = \frac{AC}{ac}$. Die durch die Höhen BD, bd gebildeten Dreiecke ABD, abd sind einander ähnlich. Man hat folglich $\frac{AB}{ab} = \frac{BD}{bd}$. Multiplicirt man diese Gleichungen Glied für Glied in einander, so erhält man

$$\frac{AB^2}{ab^2} = \frac{AC \times BD}{ac \times bd} = \frac{Dr.\ ABC}{Dr.\ abc}.$$

II. Die Flächeninhalte ähnlicher Polygone ABCD, abcd (Fig. 118) verhalten sich wie die Quadrate ihrer ähnlich liegenden Linien. Die Aehnlichkeit der Dreiecke ABC, abc gibt $\frac{T}{t} = \frac{AB^2}{ab^2}$. Ebenso ist $\frac{T'}{t'} = \frac{AC^2}{ac^2} = \frac{AB^2}{ab^2}$, u. s. fort. Aus der Reihe dergleichen Verhältnisse $\frac{T}{t} = \frac{T'}{t'} = \frac{T''}{t''} \ldots = \frac{AB^2}{ab^2}$ ergibt sich $\frac{T+T'+T''+\ldots}{t+t'+t''+\ldots} = \frac{ABCD\ldots}{abcd\ldots} = \frac{AB^2}{ab^2}$.

Aus dem Vorhergehenden ergeben sich nachstehende Folgerungen:

1) Wenn man über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks ABC (Fig. 137) als homologen Seiten drei ähnliche Vielecke M, N, P construirt, so ist: $\frac{M}{AB^2} = \frac{N}{BC^2} = \frac{P}{AC^2}$, woraus $\frac{M}{AB^2} = \frac{N+P}{BC^2+AC^2}$. Da $AB^2 = BC^2 + AC^2$, so ist $M = N + P$. Der über das Quadrat der Hypothenuse angeführte Satz (§. 99) dehnt sich hiernach über alle ähnlichen Vielecke aus. Mit Hülfe dieses Satzes kann man also leicht zu zwei ähnlichen Vielecken ein ähnliches construiren, welches ihrer Differenz oder ihrer Summe gleich ist.

2) Die Flächeninhalte der regelmäßigen Vielecke von derselben Seitenzahl verhalten sich wie die Quadrate der eingeschriebenen oder umschriebenen Kreise.

3) Die Flächeninhalte C, c der Kreise verhalten sich wie die Quadrate ihrer Radien R, r oder ihrer Durchmesser. Bezeichnet man durch α und β die Ueberschüsse der Flächeninhalte der ähnlich umschriebenen regelmäßigen Polygone über die der Kreise, so hat man:

$\frac{C+\alpha}{c+\beta} = \frac{R^2}{r^2}$, woraus $\frac{C}{c} = \frac{R^2}{r}$. (Algebra §. 22.)

Es ergibt sich dies auch aus den Gleichungen $C = \pi R^2$ und $c = \pi r^2$.

4) Der Kreis, welcher die Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreiecks zum Durchmesser hat, ist hiernach so groß als die Summe der Kreise, welche die Katheten zu Durchmessern haben. Man kann also leicht zwei oder mehrere Kreise zu einem Kreis zusammensetzen, auch den Unterschied zweier Kreise durch einen Kreis darstellen.

Anmerkung. Wenn man über den drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks, als Durchmessern, Halbkreise beschreibt, und zwar so, daß die Halbkreise über den Katheten nach aussen gekehrt sind, der Halbkreis über der Hypothenuse dagegen nach innen, so bilden sich zwischen den Bogen der kleinern Halbkreise und dem des größern zwei mondförmige Flächenräume, von denen man leicht beweist, daß die Summe ihrer Flächeninhalte genau der Fläche des Dreiecks gleich ist. Hypokrates aus Chios ist der Erfinder dieses Satzes.

§. 108. Die Flächeninhalte zweier Dreiecke ABC, abc (Fig. 136), welche einen Winkel gleich (A = a) haben, verhalten sich wie die Produkte der Seiten, die diesen Winkel einschließen. Zieht man die Perpendikel BD, bd, so hat man $\frac{\text{Dr. ABC}}{\text{Dr. abc}} = \frac{BD \times AC}{bd \times ac}$. Die ähnlichen Dreiecke ABD, abd geben $\frac{BD}{bd} = \frac{AB}{ab}$; folglich $\frac{\text{Dr. ABC}}{\text{Dr. abc}} = \frac{AB}{ab} \cdot \frac{AC}{ac}$.

§. 109. Wir gehen jetzt zur Auflösung einiger auf die Flächeninhalte Bezug habenden Aufgaben über.

I. Ein gegebenes Dreieck ABC (Fig. 133) durch gerade Linien FD, FE, die von demselben Punkte F auf der Basis ausgehen, in drei gleiche Theile zu theilen. Wird die Basis in den Punkten H und I in drei gleiche Theile getheilt, so ist das Dreieck CBI gleich $\frac{1}{3}$ des Dreiecks ABC, die unbekannte Fläche CDF mithin = CBI. Nun hat man $\frac{\text{Dr. CDF}}{\text{Dr. CBI}} = \frac{CD \times CF}{CB \times CI}$; folglich $CD \times CF = CB \times CI$, oder $\frac{CD}{CB} = \frac{CI}{CF}$. Hieraus erhellet, daß DI zu BF parallel sein muß. Man

verbindet demnach den gegebenen Punkt F mit der gegenüberliegenden Spitze B durch die Gerade BF, legt dann zu ihr die Geraden HE, ID parallel, und zieht endlich die Linie FD, FE.

Dieselbe Construction wird angewendet, um das Dreieck durch gerade Linien, die von einem und demselben Punkte seines Umfanges ausgehen, in 4, 5.... gleiche Theile zu theilen. Man hat deshalb nur nöthig, die Seite, auf welcher der gegebene Punkt liegt, als Basis anzusehen, und dieselbe in die gegebene Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Es ist hiernach leicht, ein dreieckförmiges Grundstück in gleiche Theile durch Wege abzutheilen, die nach einem gemeinschaftlichen Brunnen hinlaufen.

II. Ein gegebenes Dreieck in eine beliebige Anzahl gleicher Theile so zu theilen, daß die Theilungslinien sämmtlich von einem innerhalb des Dreiecks liegenden Punkte M auslaufen. Man soll z. B. das Dreieck ABC (Fig. 138) von dem Punkte m aus auf die verlangte Art in drei gleiche Theile theilen. Man verbinde den Punkt m mit den drei Spitzen des Dreiecks durch die Linien Cm, Am und Bm. Es sei das Dreieck CFM gleich dem dritten Theil des Dreiecks ABC angenommen; ferner die Seite AB in die verlangte Anzahl gleicher Theile getheilt, mithin hier in drei, also AD = DE = EB. Dieser Construction zufolge wäre Dreieck CFM eben so groß wie Dreieck ACD, oder, wenn DG parallel zu AC läuft, eben so groß wie Dreieck ACG. Hieraus erhellet, daß das Dreieck FGA eben so groß wie das Dreieck FGm sein müsse, mithin GF parallel zu mA liege. Um das verlangte Dreieck CFM zu erhalten, zieht man demnach durch den Theilungspunkt D die Linie DG parallel zu AC, durch den Durchschnittspunkt G die Linie GF parallel zu mA. Verbindet man den Durchschnittspunkt F mit m, so ist Dreieck CFM = $\frac{1}{3}$ Dreieck ABC. Man ziehe jetzt auf ähnliche Weise durch den zweiten Theilungspunkt E die Linie EH parallel zu AC, durch den Durchschnittspunkt I mit der Geraden Cm die Linie IK parallel mit AM, verbinde endlich den Durchschnittspunkt K mit M, so ist Viereck mFAK = $\frac{1}{3}$ ABC.

III. Ein gegebenes Dreieck in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen, daß die Theilungslinien mit einer seiner Seiten parallel laufen.

Man soll z. B. das Dreieck ABC (Fig. 139) in drei gleiche Theile theilen, so daß die Theilungslinien zu der Seite AB parallel sind. Es seien ED, GF die verlangten Theilungslinien. Man hat

Dr. GCF : Dr. CED : Dr. CAB = 1 : 2 : 3;
ferner Dr. CGF : Dr. CED : Dr. CAB = $CG^2 : CE^2 : CA^2$;
woraus $CG^2 : CE^2 : CA^2 = 1 : 2 : 3$.

Wird nun über CA als Durchmesser ein Halbkreis beschrieben, und von C aus die Linien CG, CE als Sehnen aufgetragen, dergestalt, daß G′C = GC, EC = E′C ist, so erhalten wir $CG'^2 : CE'^2 : CA^2 = 1:2:3$. Nun ist aber $CG'^2 : CE'^2 : CA^2 =$ CH : CI : CA, wo G′H, E′I Perpendikel auf CA sind; folglich auch CH : CI : CA = 1 : 2 : 3.

Hiernach theilt man eine der beiden andern Seiten des Dreiecks, z. B. AC, in drei gleiche Theile, so daß HC = HI = IA; errichtet in den Theilungspunkten H und I Perpendikel auf AC, welche von dem über AC beschriebenen Halbkreise in G′ und E′ begrenzt werden, trägt dann die Sehnen CG′ und CE′ auf AC von C nach G und E. Die durch diese Punkte zu AB parallel gezogenen Geraden GF und ED sind die gesuchten Theilungslinien.

IV. Ein dem gegebenen Dreieck ABC (Fig. 140) gleich großes Dreieck EIK zu construiren, dessen Basis EI sei und dessen Spitze in einem Punkte K auf der gegebenen Linie NK liege. Es seien die beiden Dreiecke ABC und ADF gleich groß angenommen. Da $\frac{\text{Dr. ABC}}{\text{Dr. ADI}} = \frac{AB \times AC}{AD \times AF}$ so ist $AB \times AC = AD \times AF$, oder $\frac{AB}{AD} = \frac{AF}{AC}$; folglich BF zu DC parallel. Will man also ein dem Dreieck ABC gleich großes Dreieck GEH construiren, dessen Spitze E gegeben sei und dessen Basis GH sich in der Richtung AH der Basis AC des gegebenen Dreiecks befinde, so legt man ED zu AC parallel, zieht hierauf DC und zu ihr BF parallel. Hiernach ist Dreieck ADF = ABC. Nimmt man jetzt in der Richtung von AC die Linie GH = AF, so ist das Dreieck GHE mit dem Dreieck ABC von gleichem Flächeninhalte, was verlangt wurde. Es ist zu bemerken, daß die nämliche Construction sich auch auf den Fall anwenden läßt, wo anstatt der Lage des Scheitels E die Basis GH gegeben wäre; man könnte auch den Winkel H als gegeben ansehen; es sind dies eben so viele verschiedene Aufgaben, die durch ein und dasselbe Verfahren gelöst werden.

Betrachtet man EG als Basis, so kann man das Dreieck EGH in ein ihm gleich großes EIL verwandeln, dessen Scheitel in I liegt. Auf diese Weise wäre das Dreieck ABC in ein ihm gleich großes EIL verwandelt, das eine gegebene Seite EI und einen gegebenen Winkel

IEL hat. Die zu EI gezogene Parallele LK endlich schneidet die gegebene Linie NK in einem Punkte K. Das Dreieck EIK = EIL = ABC wird sonach der Aufgabe genügen.

Man könnte auch den Punkt K dadurch bestimmen, daß man die Länge IK, oder den Winkel EKI, oder irgend eine andere Bedingung als gegeben annimmt.

Drittes Kapitel.

Von den Figuren im Raume.

Von den geraden Linien und Ebenen.

§. 110. Aus dem Begriff der Ebenen (§. 1) ergibt sich Folgendes:

1) Die Ebene ist eine der Länge und Breite nach unbegrenzte Fläche.

2) Drei Punkte, die nicht in einer geraden Linie liegen, bestimmen die Lage einer Ebene. Haben also zwei Ebenen drei Punkte gemein, die nicht durch eine gerade Linie verbunden werden können, so bilden sie nur eine und dieselbe Ebene.

3) Der Durchschnitt zweier Ebenen ist eine gerade Linie.

4) Zwei einander schneidende Linien liegen in einerlei Ebene.

5) Zwei Parallelen liegen in einer und derselben Ebene.

6) Ein Dreieck liegt in einer und derselben Ebene.

Anmerkung. Nicht so verhält es sich mit vier im Raume beliebig angenommenen Punkten; denn die durch drei derselben gelegte Ebene wird nicht immer auch durch den vierten gehen.

§. 111. Bewegt sich der rechte Winkel PAB (Fig. 141) um die Linie AB, bis AP mit einer dritten Linie AC einen rechten Winkel PAC bildet, so sagt man, daß AP auf der durch die beiden Geraden AB, AC gelegten Ebene senkrecht steht.

Wenn eine Gerade AP auf zwei andern Geraden AB und AC in ihrem Durchschnitte A senkrecht steht, so ist

sie auch auf jeder andern Geraden AI senkrecht, die in der Ebene der Geraden AB und AC durch den Punkt A gezogen wird. Um den Winkel PAI näher zu bestimmen, verbinden wir die beliebigen Punkte P, C, B durch gerade Linien, wobei jedoch AB = AC angenommen ist. Da die Dreiecke PAC und PAB einander gleich sind, so sind es auch die Linien PB und PC. Vereinigen wir die Scheitel P und A mit der Mitte O der Basis BC der gleichschenkligen Dreiecke PBC und ABC durch die Geraden PO und AO, so werden dieselben auf der Basis senkrecht stehen. Die rechtwinkligen Dreiecke PCO, PAC, ACO geben $PC^2 = PO^2 + CO^2 = AP^2 + AC^2$, $AC^2 = CO^2 + AO^2$; woraus durch Elimination von AC^2 sich ergibt $PO^2 = AP^2 + AO^2$; das Dreieck APO ist demnach rechtwinklig. Eben so geben die rechtwinkligen Dreiecke POI, APO, AOI die Gleichungen:

$PI^2 = PO^2 + OI^2$, $PO^2 = AP^2 + AO^2$, $AI^2 = OI^2 + OA^2$; woraus $PI^2 = AI^2 + AP^2$; der Winkel PAI ist daher ein rechter. PA steht also auf jeder in der Ebene MN durch A gezogenen Geraden senkrecht.

Hieraus ziehen wir nachstehende Folgerungen:

1) Die schiefen Linien PC, PB (Fig. 141), welche von der auf einer Ebene senkrechten Geraden AP gleichweit abstehen, sind gleich, und umgekehrt. Es folgt dies aus der Gleichheit der Dreiecke PAC und PAB.

Die Durchschnitt- oder Fußpunkte B, E, D, C der gleichen schiefen Linien PB, PE... (Fig. 142) liegen daher sämmtlich in der Peripherie eines aus dem Punkte A als Mittelpunkt beschriebenen Kreises. Um also von einem ausserhalb einer Ebene MN angenommenen Punkte P auf dieselbe eine senkrechte Linie zu fällen, wird man in dieser Ebene drei Punkte E, B, C suchen, die gleich weit von dem gegebenen Punkt P entfernt sind. Der Mittelpunkt des durch jene drei Punkte gelegten Kreises wird der Fußpunkt des verlangten Perpendikels sein.

2) Bewegt sich die Ebene des rechten Winkels PAB (Fig. 142) um einen seiner Schenkel AP, so beschreibt der andere Schenkel AB während dieser Bewegung eine auf AP senkrechte Ebene. Denn enthielte die durch A auf AP senkrecht errichtete Ebene MN nicht die Gerade AB in allen ihren Lagen,

befände sich vielmehr eine derselben, z. B. AD, ausserhalb der Ebene MN, so würde letztere von der durch die Geraden AP und AD gelegten Ebene in einer Geraden CA geschnitten werden, die ebenfalls auf AP senkrecht wäre. Man hätte alsdann in einerlei Ebene DAP auf eine und dieselbe Gerade AP zwei Senkrechten AC und AD gezogen.

3) Durch einen Punkt C oder A (Fig. 142) kann man auf eine Gerade AP immer eine senkrechte Ebene errichten und zwar nur eine. Denn ist CA senkrecht auf AP gezogen, so wird durch Umdrehung des rechten Winkels um AP die Gerade AC die in Frage stehende Ebene beschreiben.

4) Von einem Punkt A oder P (Fig. 142) läßt sich auf eine Ebene MN immer eine Senkrechte fällen und zwar nur eine. Die Senkrechte ist die kürzeste von allen Geraden, die man von einem Punkte P nach einer Ebene führen kann. Die schiefe Linie wird desto größer, je mehr sie sich von der senkrechten entfernt. Da die gleichen schiefen Linien gleich weit von der auf der Ebene senkrecht stehenden Geraden abstehen, so lassen sich diese verschiedenen Linien auf einerlei Ebene zurückführen. Wäre z. B. AI $>$ AC, so nähme man in der Ebene PAI die Linie AE $=$ AC. Da PE $=$ PC und PI $>$ PE, so ist auch PI $>$ PC.

Anmerkung. Da die Senkrechte die kürzeste Linie ist, die man von einem Punkte A nach einer Ebene ziehen kann, so bietet sie das natürliche Maß zur Bestimmung der Entfernung des Punktes von der Ebene dar.

5) Zwei Ebenen MN, mn (Fig. 143), welche auf einer und derselben Geraden AP senkrecht sind, können einander nicht schneiden. Denn wären sie nicht parallel, und man zöge von irgend einem Punkte O ihres gemeinschaftlichen Durchschnitts nach den Fußpunkten P und A die Geraden OA und OP, so würden diese die Gerade AP unter rechten Winkeln schneiden. Man könnte also von einem und demselben Punkte in einerlei Ebene auf eine Gerade zwei senkrechte Linien fällen, was unmöglich ist.

6) Wenn man von einem Punkte P (Fig. 141) auf eine in der beliebigen Ebene MN liegenden Gerade BC das Perpendikel PO ziehen will, so fälle man PA senkrecht auf jene Ebene MN, errichte

dann vom Fußpunkt A die Linie AO senkrecht auf BC. Verbindet man endlich die Punkte O und P durch eine Gerade PO, so wird solche die gesuchte Senkrechte sein. Um sich hiervon zu überzeugen, ist es hinreichend, auf BC die Stücke OC und OB gleich groß zu nehmen, die Linien AB und AC zu ziehen, und die oben angeführte Beweisart zu wiederholen.

Man bemerke, daß die Ebene PAO auf der Geraden BC senkrecht steht, was ein Mittel abgibt, durch einen gegebenen Punkt P auf eine Gerade eine senkrechte Ebene zu fällen.

Anmerkung. Eine und dieselbe Gerade kann auf zwei sich schneidenden Ebenen nicht zugleich senkrecht sein.

§. 112. Wenn von zwei parallelen Linien PA, QO (Fig. 144) die Ebene MN auf einer derselben PA senkrecht steht, so ist sie auch auf der andern senkrecht. Denn zieht man in der Ebene MN die Gerade AO, und auf dieselbe die Senkrechte BO, so wird letztere auf der Ebene APO, mithin auch auf der in dieser Ebene enthaltenen Geraden QO senkrecht sein. Ausserdem muß wegen des Parallelismus der Geraden PA und QO der Winkel QOA ein rechter sein, weil PAO ein solcher ist. Die Linie QO steht also auf zwei geraden Linien AO und BO senkrecht, mithin auf der Ebene MN selbst senkrecht.

Umgekehrt, zwei gerade Linien AP, QO, welche auf einer und derselben Ebene senkrecht stehen, sind einander parallel. Denn wäre dies nicht der Fall, so könnte man durch den Punkt A eine von der AP verschiedene Linie parallel zu QO ziehen. Diese Parallele würde alsdann mit AP auf der Ebene MN zugleich senkrecht sein, was unmöglich ist.

Sind zwei gerade Linien Aa und Bb (Fig. 145) einer und derselben dritten Linie Cc parallel, so sind sie auch unter sich parallel, obgleich sie in verschiedenen Ebenen liegen. Denn legt man auf die Gerade Cc eine senkrechte Ebene, so ist dieselbe, vermöge des eben bewiesenen Lehrsatzes, auf ihren Parallelen Aa und Bb senkrecht. Da nun Aa und Bb auf der nämlichen Ebene senkrecht stehen, so sind sie zu einander parallel.

Sind mehrere Linien im Raume untereinander parallel, und ist eine derselben auf einer Ebene senkrecht, so sind jene Linien sämmtlich auf dieser Ebene senkrecht.

§. 113. Wenn zwei parallele Ebenen MN, mn (Fig. 143) durch eine und dieselbe Ebene kKl geschnitten werden, so sind ihre Durchschnitte KI, ki parallel. Denn einerseits liegen sie in einerlei Ebene, anderseits können sie einander nicht schneiden. Hieraus folgt:

1) Parallele Ebenen MN, mn haben gemeinschaftliche Senkrechten Die Gerade AP sei senkrecht auf MN, so ist sie auch senkrecht auf mn. Denn legt man durch AP die beliebige Ebene BCcb welche die parallelen Ebenen nach den Geraden BC, bc schneidet, so sind diese Durchschnitte ebenfalls parallel. Nun ist AP senkrecht auf BC, folglich auch bc senkrecht auf AP, die, da die Ebene BCcb völlig beliebig ist, auf jeder in der Ebene mn durch ihren Fußpunkt P gezogenen Geraden senkrecht steht.

2) Parallellinien Ii, Kk zwischen zwei parallelen Ebenen MN, mn sind einander gleich. Denn die beiden Parallelen Ii, Kk liegen in derselben Ebene IKki, und da die Ebenen MN, mn parallel sind, so ist ik parallel zu IK, folglich die Figur ikKI ein Parallelogramm, und daher Ii = Kk. Parallele Ebenen haben also in allen ihren Punkten gleiche Entfernungen von einander.

§. 114. Wenn eine Gerade Cc (Fig. 145) zu einer Linie Aa parallel ist, so ist sie zugleich einer jeden durch Aa gelegten Ebene AabB parallel. Da die Gerade Cc ganz in der Ebene Ac der beiden Parallelen liegt, so kann sie die Ebene Ab nur an ihrem Durchschnitt mit Ac, das ist in Aa treffen. Nach der Voraussetzung aber schneidet die Cc die Aa nicht, mithin kann sie auch die Ebene Ab nicht treffen.

Sind zwei gerade Linien ab, Cc gegeben, welche weder einander schneiden, noch parallel sind, so kann man immer durch eine derselben eine Ebene, und zwar nur eine, legen, die zu der andern Geraden parallel ist. Denn zieht man durch irgend einen Punkt a oder b die Linie aA oder bB parallel zu Cc, so wird die Ebene Ab die verlangte sein.

§. 115. Die Neigung zweier sich schneidenden Ebenen Ab, Ac (Fig. 145), oder die größere oder geringere Abweichung derselben von einander, heißt Flächenwinkel. Man bezeichnet ihn durch vier Buchstaben, von denen die beiden mittlern dem gemeinschaftlichen Durchschnitt beider Ebenen oder der Kante des Flächenwinkels an-

gehören. So ist baAC der von den Ebenen Ab, Ac, welche sich in der Linie Aa schneiden, gebildete Flächenwinkel.

Anmerkung. Der zwischen zwei sich schneidenden Ebenen begriffene Raum bildet den Winkel dieser Ebenen; er ist mit Bezug auf die Ebenen eben das, was der Winkel mit Bezug auf die Geraden ist.

Die geradlinigen Winkel bac, BAC (Fig. 145), welche aus dem Durchschnitte eines Flächenwinkels mit zwei parallelen Ebenen entstehen, sind gleich. Denn ab und AB sind zu einander parallel, desgleichen ac und AC. Nimmt man nun auf diesen Linien ab = AB, ac = AC, und zieht die Geraden Cc, Bb, cb und CB; so sind die Figuren Ab und Ac Parallelogramme. Die Seiten Bb und Cc sind folglich der Seite Aa gleich und parallel, die Figur Cb mithin ein Parallelogramm. Da nun die Dreiecke bac und BAC die Seiten einzeln genommen gleich haben, so sind diese Dreiecke gleich, folglich Winkel bac = BAC. Hieraus folgt:

1) Zwei Winkel bac, BAC im Raume sind gleich, wenn ihre Schenkel parallel und ihre Oeffnungen nach einerlei Seite gerichtet sind. Liegen die Oeffnungen nach entgegengesetzten Seiten, so sind diese Winkel Supplementwinkel zu einander, gerade wie bei den Winkeln in der Ebene (§. 38).

2) Die Ebenen solcher Winkel sind zu einander parallel. Denn fällt man aus dem Scheitel a auf die Ebene abc die Gerade aI senkrecht, und zieht durch den Punkt I, wo sie die Ebene ABC trifft, in dieser Ebene die Geraden IK und IL bezüglich zu AB und AC parallel; so sind sie auch den Geraden ab und ac parallel (§. 112). Die Winkel Iab, Iac sind aber rechte und gleich den Winkeln aIK, aIL; folglich die Linie aI senkrecht auf der Ebene KIL. Da nun die Ebenen bac und BAC auf einer und derselben Geraden senkrecht sind, so müssen sie parallel sein.

3) Werden die Endpunkte von drei gleichen und parallelen Geraden durch Linien verbunden, so sind die dadurch entstehenden Dreiecke gleich und ihre Ebenen parallel.

4) Dieser Satz gilt auch von Polygonen, die entstehen, wenn die Endpunkte mehrerer gleichen Parallelen durch gerade Linien verbunden werden.

§. 116. Wenn man die beiden Flächenwinkel BAPC, bapc (Fig. 146) durch die Ebenen BAC, bac, welche senkrecht auf den Kanten AP, ap stehen, schneidet; so ist das Verhältniß der Flächenwinkel dem der geradlinigen Winkel BAC, bac gleich, welche aus diesem Durchschnitte entstehen, und deren Seiten in jeder dieser Ebenen aus einem Punkte der gemeinschaftlichen Durchschnitte AP, ap über denselben errichtet sind.

1) Es ist zuvörderst klar, daß der Winkel BAC ungeändert bleibt, in welchem Punkte A der Durchschnittslinie AP man auch die senkrechte Ebene führen mag (§. 115).

2) Sind die beiden geradlinigen Winkel BAC, bac gleich, so sind es auch die Flächenwinkel, weil die letztern zusammenfallen, wenn man die erstern aufeinander legt.

3) Sind die Winkel BAC, bac commensurabel, so trägt man ihr gemeinschaftliches Maß CAx auf CAB und cab so oft, als es in ihnen enthalten ist, und legt dann Ebenen durch die Kante AP und die Theilungslinien Ax..., so wie durch die Kante ap und die Theilungslinie ax'.... Auf diese Weise wird jeder Flächenwinkel den Flächenwinkel CAPx gerade so viel mal enthalten, als der Winkel CAx in den Winkeln CAB und cab enthalten ist. Die Flächenwinkel haben also mit den Winkeln CAB und cab einerlei Verhältniß.

4) Wenn die Winkel CAB, cab incommensurabel sind, so wird eine der im §. 27 ähnliche Schlußart zeigen, daß unsere Proportion ebenfalls statt hat.

Hieraus folgt, daß ein Flächenwinkel den geradlinigen Winkel zu seinem Maß hat, welchen zwei in jeder dieser Ebenen aus einerlei Punkt ihrer gemeinschaftlichen Durchschnittslinie über derselben senkrecht errichteten Geraden einschließen. Denn nimmt man cab als Einheitswinkel an, so kann man den ihm entsprechenden Flächenwinkel cpab als Einheit der Flächenwinkel (wie §. 28) betrachten. Es können demnach die Kreisbogen unmittelbar als Maße der Flächenwinkel dienen.

Anmerkung. Daß der Winkel CAB, den die auf dem gemeinschaftlichen Durchschnitte (Fig. 146) der Ebenen senkrechten Geraden AC und AB einschließen, das natürliche Maß des von ihnen gebildeten Flächenwinkels ist, ergibt sich auch aus folgender Betrachtung. Läßt man nämlich eine der Ebenen PC

sich um den gemeinschaftlichen Durchschnitt AP beider Ebenen drehen, so wird AC bei dieser Bewegung eine auf AP senkrechte Ebene beschreiben. Fällt AC mit AB zusammen, so wird die Ebene PC auf PB zu liegen kommen, was abermals statt findet, wenn AC in die Verlängerung von AB fällt. Der Winkel CAB entsteht, wächst und erreicht also seine Grenze zugleich mit der Neigung der Ebenen.

Bei dem Zusammentreffen der Ebenen finden ähnliche Sätze wie bei dem der Linien statt. So z. B. betragen die anliegenden Winkel zweier sich schneidenden Ebenen zusammen zwei Rechte; die an der Kante einander entgegengesetzten Flächenwinkel sind gleich. Werden zwei parallele Ebenen von einer dritten geschnitten, so sind die correspondirenden Winkel gleich, u. s. w.

Anmerkung. Zwei Ebenen aber, welche mit einer dritten gleiche Neigungswinkel nach derselben Richtung bilden, sind nicht immer einander parallel; sie werden es jedoch, wenn zugleich ihre Durchschnittslinien mit jener dritten Ebene parallel sind.

§. 117. Wenn der Flächenwinkel zweier Ebenen durch einen rechten Winkel gemessen wird, so sagt man, die Ebenen stehen auf einander senkrecht.

Wenn eine Gerade AB auf einer Ebene MN senkrecht steht, so ist jede andere, durch diese Gerade gelegte Ebene PQ auf der ersten senkrecht (Fig. 147). Denn zieht man in der Ebene MN die Gerade AC senkrecht auf RP, so ist der Winkel BAC ein rechter (§. 111).

1) Um also im Punkt A auf die Ebene MN eine Senkrechte AB zu errichten, legt man in dieser Ebene die Linie PR und an dieselbe einen rechten Winkel PAC an, dreht darauf diesen Winkel um PR bis die Ebene PQ senkrecht auf der Ebene MN ist.

2) Durch eine Gerade PQ oder AB (Fig. 148) kann man nur eine Ebene senkrecht über MN errichten. Diese Ebene ABQP wird durch eine auf MN senkrechte Gerade AP bestimmt.

3) Die Projection eines Punktes P auf einer Ebene MN ist der Fußpunkt des von jenem Punkte P auf diese Ebene gefällten Perpendikels PA. Die Projection AB einer Linie PQ ist die Folge der Fußpunkte sämmtlicher von den verschiedenen Punkten der Linie auf

die Ebene gefällten Perpendikel. Ist die Linie gerade, so bildet das System dieser Perpendikel eine auf MN senkrechte Ebene BAPQ. Die Durchschnittslinie AB dieser beiden Ebenen ist die Projection der Linie PQ, welche Projection durch die Projection A und B zweier ihrer Punkte P und Q bestimmt ist.

4) Man nennt den Winkel, welchen eine Gerade mit ihrer Projection auf einer Ebene bildet, den Neigungswinkel der Geraden mit dieser Ebene. Die Geraden AB, AO.... (Fig. 141) sind die Projectionen der Geraden PB, PO.... auf der Ebene MN. Die Winkel, welche sie mit dieser Ebene machen, sind die Neigungswinkel PBA, POA....

Anmerkung. Leicht lassen sich folgende zwei Lehrsätze beweisen:

I. Zwei parallele Geraden haben gegen eine beliebige Ebene gleiche Neigung.

II. Zwei parallele Ebenen haben gegen eine beliebige Gerade gleiche Neigung.

§. 118. Wenn zwei Ebenen MN und PQ (Fig. 147) auf einander senkrecht sind, so ist jede Gerade AB, welche in einer derselben PQ auf den gemeinschaftlichen Durchschnitt PR senkrecht gezogen ist, senkrecht auf der andern MN. Wenn man nämlich in der Ebene MN durch den Punkt A die Gerade AC senkrecht auf PR zieht, so ist der Winkel BAC ein rechter, weil er das Maß des Flächenwinkels der Ebenen ist. Die Linie AB ist demnach auf PR und AC senkrecht, folglich auch auf der Ebene dieser Geraden.

Umgekehrt, wenn man von irgend einem Punkt A des gemeinschaftlichen Durchschnitts PR zweier auf einander senkrecht stehenden Ebenen PQ und MN über der zweiten MN eine Senkrechte AB errichtet, so liegt diese in der andern Ebene PQ. Denn wäre dies nicht der Fall, so könnte man durch A in der Ebene PQ eine Senkrechte auf PR errichten, mithin eine zweite Senkrechte auf die Ebene durch einen und denselben Punkt, was unmöglich ist.

Der Durchschnitt AB zweier Ebenen PQ, RS (Fig. 149), die auf einer und derselben Ebene MN senkrecht stehen, ist ebenfalls auf dieser Ebene senkrecht. Denn da die aus A über der Ebene MN errichteten Senkrechten sich zu gleicher Zeit in beiden Ebenen PQ, RS befinden müssen, so fallen sie in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnitt zusammen.

Umgekehrt, wenn eine Ebene auf dem gemeinschaftlichen Durchschnitte zweier anderer Ebenen senkrecht ist, so ist sie auch auf diesen Ebenen senkrecht.

Anmerkung. Wenn von drei durch denselben Punkt gehenden Geraden je zwei und zwei auf einander senkrecht sind, so ist jede derselben auf der Ebene der beiden andern senkrecht, auch sind die drei Ebenen auf einander senkrecht.

Umgekehrt, wenn drei Ebenen auf einander senkrecht sind, so sind ihre gegenseitige Durchschnitte ebenfalls auf einander senkrecht.

§. 119. Der kürzeste Abstand Oo (Fig. 145) zweier sich nicht schneidenden Geraden aob, AC ist die auf beiden Linien senkrechte Gerade. Denn legt man durch ab eine Ebene bac parallel zu AC, und durch letztere eine Ebene BAC parallel zu ac (§. 114), so wird die gesuchte Entfernung offenbar die der beiden parallelen Ebenen bac, BAC sein (§. 113). Durch ab führt man die Ebene baIK auf die Ebene BAC senkrecht. Die Durchschnittslinie IK schneidet die AC in einem Punkte O, von welchem Punkte O aus man auf die Ebene BAC das Perpendikel Oo fällt, um den gesuchten Abstand zu erhalten.

Anmerkung. Sind demnach zwei Linien auf einer dritten senkrecht, so folgt hieraus noch nicht, daß die beiden Perpendikel auch parallel seien; es findet solches nur dann statt, wenn beide Perpendikel in einerlei Ebene liegen.

§. 120. Zwei Geraden AB, CD (Fig. 150) werden durch drei parallele Ebenen RS, PQ, MN in proportionale Theile geschnitten. Man verbinde zuvörderst die Punkte A und D durch eine Gerade AD, und ziehe dann die geraden Linien BD, EF, FG, AC. Die Linien EF und BD sind einander parallel, desgleichen die Linien AC und FG (§. 113). Man hat also

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FD} \text{ und } \frac{AF}{FD} = \frac{CG}{GD}; \text{ woraus } \frac{AE}{EB} = \frac{CG}{GD}.$$

Anmerkung. Der von zwei geraden Linien bewiesene Satz gilt von jeder beliebigen Anzahl solcher Linien.

Von der körperlichen Ecke oder dem körperlichen Winkel.

§. 121. Der zwischen mehreren in demselben Punkte S (Fig. 151) sich schneidenden Ebenen liegende unbegrenzte Raum wird körperliche Ecke oder körperlicher Winkel genannt. Der gemeinschaftliche Punkt S heißt der Scheitel oder die Spitze der Ecke. Die Durchschnittslinie von je zwei die Ecke bildenden Ebenen (Seitenflächen) heißen die Kanten oder Seitenlinien. Der von zwei in derselben Seitenfläche der Ecke liegenden Kanten eingeschlossene Winkel heißt Kantenwinkel. Die körperliche Ecke heißt dreikantig, vierkantig, oder vielkantig, je nachdem dieselbe drei, vier oder mehrere Seitenflächen hat.

Anmerkung. Die dreikantige Ecke wird insbesondere auch körperliches Dreieck genannt. — Eine körperliche Ecke hat so viele Flächenwinkel als Kantenwinkel. — Eine körperliche Ecke wird dadurch bezeichnet, daß man entweder bloß den Buchstaben am Scheitel anschreibt, oder, wenn es die Deutlichkeit erfordert, diesen Buchstaben zuerst ansetzt und dann die zur Benennung der Kanten dienenden Buchstaben darauf folgen läßt. — Eine körperliche Ecke ist convex oder concav, je nachdem eine gerade Linie ihre Oberfläche blos in zwei oder in mehreren Punkten schneiden kann. Wenn von körperlichen Ecken die Rede ist, so sind, wenn das Gegentheil nicht ausdrücklich bemerkt wird, immer convexe damit gemeint.

Wird die körperliche Ecke S durch eine Ebene ABCDE begrenzt, so heißt ein solcher Körper, von welchem eine der ihn einschließenden Ebenen irgend ein Vieleck, alle andern aber Dreiecke sind, die eine gemeinschaftliche Spitze haben, eine Pyramide.

Ist das Polygon ABCDE, welches der Pyramide als Basis dient, regelmäßig und geht überdies die aus dem Scheitel S auf die Basis gefällte Senkrechte (Höhe) durch den Mittelpunkt des Polygons, so heißt die Pyramide gleichseitig. Sind bei einer Pyramide die Seitenlinien einander gleich, so heißt die Pyramide gerade, sonst schief. Die Pyramide erhält den Namen der dreiseitigen, vierseitigen, vielseitigen, je nachdem die Grundfläche derselben drei, vier oder mehrere Seiten hat.

Anmerkung. Die nseitige Pyramide wird von n + 1 Ebenen begrenzt. Die Ecken der dreiseitigen Pyramide sind sämmtlich dreikantig, was bei den übrigen Pyramiden nur an den Ecken der Grundfläche der Fall ist. Jede Seitenfläche der dreiseitigen Pyramide kann man als Grundfläche annehmen. Die dreiseitige Pyramide ist unter allen von lauter Ebenen begrenzten oder den eckigen Körpern der einfachste; sie ist im Raume das, was das Dreieck in der Ebene ist. Denn gleich wie sich die Vielecke aus lauter Dreiecken zusammensetzen lassen, ebenso können auch alle eckige Körper (Polyeder) durch gehörige Zusammenstellung dreiseitiger Pyramiden gebildet werden.

§. 122. Mehrere von einem Punkte S (Fig. 151) ausgehende Geraden SA, SB.... werden durch zwei parallele Ebenen AC, ac proportional geschnitten. Die Geraden ab, bc.... sind als Durchschnittslinien der Ebenen SAB, SBC.... mit der Ebene ac parallel den Durchschnittslinien AB, BC.... derselben Ebenen mit der Ebene AC. Man hat daher:

$$\frac{SA}{Sa} = \frac{SB}{Sb} = \frac{AB}{ab}; \quad \frac{SB}{Sb} = \frac{SC}{Sc} = \frac{BC}{bc}; \text{ u. s. w.}$$

Da diese Proportionen durch ein gemeinschaftliches Verhältniß unter einander verbunden sind, so erhält man:

$$\frac{SA}{Sa} = \frac{SB}{Sb} = \frac{SC}{Sc} = \ldots\ldots$$

Der umgekehrte Satz läßt sich ebenfalls leicht beweisen.

§. 123. Das Vieleck, welches aus dem Schnitte einer Pyramide durch eine zur Basis parallel geführte Ebene entsteht, ist der Basis ähnlich. Denn man hat:

$$\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \frac{CD}{cd} \ldots\ldots$$

Ueberdies sind die Seiten der Polygone ABC.... abc.... gegenseitig einander parallel, mithin die Winkel A und a, B und b.... gegenseitig gleich (§. 115). Hieraus folgt, daß die Polygone einander ähnlich sind. — Es verhalten sich die Flächenräume dieser Polygone, wie die Quadrate ihrer Entfernungen vom Scheitel S. Denn zieht man auf die Ebene ABC... die Senkrechte SH, so trifft sie die Ebene abc..... in h, und man erhält: $\frac{AB^2}{ab^2} =$

$\frac{\text{Fl. ABCD...}}{\text{Fl. abcd...}}$ (§. 107). Nun ist aber $\frac{AB}{ab} = \frac{SB}{Sb} = \frac{SH}{Sh}$; folglich auch $\frac{\text{Fl. ABCD...}}{\text{Fl. abcd...}} = \frac{SH^2}{Sh^2}$.

§. 124. In jeder dreikantigen Ecke S (Fig. 154) ist die Summe von irgend zwei Kantenwinkel immer größer als der dritte. Der Satz braucht nur für den größten der drei Winkel bewiesen zu werden; es sei ASE dieser größte. Man nehme in der Ebene dieses Winkels DSE = FSE, ziehe die beliebige Gerade AB, und mache auf der Kante SF das Stück SC = SD, und verbinde die Punkte A und B mit C. Die Dreiecke DSB und CSB sind gleich, also BD = BC. Da $BA < BC + CA$ ist, so erhält man $AD < AC$. Aus der Betrachtung der Dreiecke ASC und ASD ergibt sich nun $ASD < ASC$ (§. 20); woraus folgt $BSA < ASC + BSC$.

§. 125. In jeder vielkantigen Ecke S (Fig. 152) ist die Summe der Kantenwinkel immer kleiner als vier Rechte. Da die Ecke als convex vorausgesetzt wird, so ist es immer möglich, sie durch eine Ebene zu schneiden, welche die Basis ABCDE.... der dadurch entstehenden Pyramide SABCDE.... abgibt. Nimmt man nun innerhalb dieser Basis irgend einen Punkt O an, und zieht nach den Scheiteln derselben vom Punkte O aus die Linien OA, OB, OC.... so wird unsere Basis in eben so viel Dreiecke, als solcher um die gegebene Ecke S liegen, zerlegt.

Die Summe beider Systeme von Dreiecken ist dieselbe. Dies vorausgesetzt, hat man Kantenwinkel $ABC < ABS + SBC$, was ebenso für die übrigen dreikantigen Ecken C, D.... gilt. Die Summe der Polygonswinkel ist demnach kleiner als die Summe der an den Seiten AB, BC... gebildeten Winkel der Dreiecke ASB, BSC... Die Summe der Winkel in S ist folglich kleiner als die Summe der Winkel in O, welche letztere vier Rechte beträgt.

Anmerkung. Man kann das eben Gesagte auf folgende Art leicht übersehen. Die Summe der in S liegenden Winkel sei a, die der an den Seiten AB, BC..., befindlichen Winkel sei b. Man hat dann $a + b = 2nR$, wenn n die Zahl der Seitenflächen der Ecke ist. Es ist aber, wie oben bewiesen, $b > 2nR - 4R$; folglich auch $a + b > 2nR - 4R + a$, oder $2nR > 2nR - 4R + a$, d. i. $4R > a$.

Aus dem vorhergehenden Lehrsatze ergibt sich, daß die Anzahl der regelmäßigen Körper, d. i. solcher Körper, die von lauter gleichen und regelmäßigen Polygonen unter gleichen Flächenwinkeln begrenzt sind, nicht größer als fünf sein kann.

1) Der Winkel des regelmäßigen Sechsecks beträgt $\frac{4}{3}$R; drei solcher Winkel machen demnach 4 R, können daher nicht zur Bildung einer Ecke dienen. Noch weniger könnte man vier regelmäßige Sechsecke, oder Siebenecke u. s. w. zu einer körperlichen Ecke verbinden.

2) Man kann weder 4, 5... regelmäßige Fünfecke, noch 4, 5... Quadrate, noch 6, 7... gleichseitige Dreiecke zu einer körperlichen Ecke verbinden, indem jeder der hierher gehörigen Winkel beziehungsweise $\frac{6}{5}$R, 1 R, $\frac{2}{3}$R beträgt.

3) Man kann also nur entweder drei, vier oder fünf gleichseitige Dreiecke, oder drei Quadrate, oder drei regelmäßige Fünfecke zu einer körperlichen Ecke verbinden. In Legendre's Geometrie Buch VI und VII sind diese Körper umständlich behandelt. (A. L. Crelle hat dies schätzbare Werk, mit Anmerkungen versehen, ins Deutsche übertragen.)

4) Die fünf regelmäßigen Körper sind:

Das Tetraeder mit dreikantigen Ecken; es wird von vier gleichseitigen Dreiecken begrenzt.

Das Octaeder mit vierkantigen Ecken; es wird von acht gleichseitigen Dreiecken eingeschlossen.

Das Ikosaeder mit fünfkantigen Ecken; es wird von zwanzig gleichseitigen Dreiecken gebildet.

Das Hexaeder oder der Cubus oder Würfel mit dreikantigen Ecken; es wird von sechs Quadraten eingeschlossen.

Das Dodekaeder mit dreikantigen Ecken; es wird von zwölf regelmäßigen Fünfecken begrenzt.

(In den Figuren 203 bis 207 sind diese fünf regulären Körper dargestellt.)

§. 126. Wenn die beiden dreikantigen Ecken S und s (Fig. 153 u. 154) aus drei Kantenwinkeln zusammengesetzt sind, die einzeln genommen in beiden gleiche Größe haben, d. i. ESF = esf, ESG = esg, FSG = fsg; so sind auch die in beiden zwischen gleichen Kantenwinkeln liegenden Flächenwinkel gleich. Wenn man auf den Kanten BS, sb, in welchen sich gleiche Kantenwinkel verbinden, SB = sb macht, und durch

diese Punkte auf jene Kanten die Ebenen BAC, bac senkrecht legt, so werden die rechtwinkligen Dreiecke SBC und sbc, SBA und sba gleich sein, woraus SC = sc, SA = sa. Die Dreiecke SCA und sca sind daher gleich, mithin auch die Dreiecke BAC und bac. Hieraus folgt, daß der Winkel ABC = abc, oder vielmehr der Flächenwinkel ABSC = absc ist. Durch eine ähnliche Construction beweist man, daß die beiden andern Flächenwinkel gegenseitig gleich sind.

1) Folgen die gleichen Kantenwinkel in derselben Ordnung auf einander, wie in den Figuren 153 und 154, so wird, wenn man die Fläche asb auf ihre gleiche Fläche ASB legt, sbc mit SBC und bca mit BCA zusammenfallen; beide Ecken ineinander geschoben decken sich demnach vollkommen.

2) Es ist ebenfalls einleuchtend, daß zwei dreikantige Ecken S und s (Fig. 153 und 154) zum Decken gebracht werden können, wenn sie einen gleichen Flächenwinkel zwischen gleichen und auf ähnliche Weise verbundenen Kantenwinkeln haben.

3) Ebenso sind zwei dreikantige Ecken vollkommen einander gleich; wenn sie einen gleichen Kantenwinkel haben, an dem zwei gleiche Flächenwinkel in einerlei Ordnung liegen.

4) Folgen dagegen die gleichen Kantenwinkel in beiden Ecken nicht in derselben Ordnung aufeinander, wie in Fig. 154, wo ASB = A′S′B′, ASC = A′S′C′ und BSC = B′S′C′, so sind die Flächenwinkel ebenfalls gegenseitig einander gleich, es ist aber nicht möglich, die Ecken ineinander zu schieben. Um das Dreieck A′B′C′ auf sein gleiches ABC zu legen, muß man den Körper S′A′C′B′ umkehren, und B′C′ auf BC, A′B′ auf AB, A′C′ auf AC legen. Der eine Körper befindet sich oberhalb der Basis BAC, während der andere unterhalb derselben liegt (Fig. 155). Zwei solche körperliche dreikantige Ecken S und S′, welche zwei paarweise gleiche Kantenwinkel haben, die aber bei der einen Ecke in umgekehrter Ordnung aufeinander folgen, wie bei der andern, werden symmetrische dreikantige Ecken genannt.

5) Gleiche vielkantige Ecken (S und S′) sind solche, die von gleich vielen gleichen in derselben Ordnung miteinander verbundenen Kantenwinkeln unter gleichen Flächenwinkeln eingeschlossen werden (Fig. 151). Die Richtigkeit dieses Satzes erhellet von selbst.

Anmerkung. Zwei vielkantige Ecken S und S′ sind einander gleich, wenn sie aus derselben Anzahl dreikantiger Ecken be-

stehen, welche je zwei und zwei einander gleich sind und in derselben Ordnung aufeinander folgen, und umgekehrt.

6) Vielkantige Ecken, die gleiche Kantenwinkel und gleiche Flächenwinkel haben, und dessen ungeachtet nicht zusammenfallen, heißen symmetrisch.

Von der Oberfläche der Körper.

§. 127. Wenn sich eine gerade Linie Aa immer in paralleler Richtung gleichförmig fortbewegt, dabei ihr Endpunkt ein beliebiges Polygon ABCDE (Fig. 157) beschreibt, und ihre Lage unverändert bleibt, so nennt man den dadurch entstandenen ebenen Körper (Polyeder) ein Prisma. Steht die Kante Aa auf der Basis ABC... senkrecht, so heißt das Prisma ein gerades; die übrigen werden schiefe genannt. Da Aa und Bb einander gleich und parallel sind, so ist Ba ein Parallelogramm; das Nämliche gilt von Cb... u. s. w. Die Seitenflächen eines Prisma's sind daher sämmtlich Parallelogramme. Ein beliebiges Stück Aa′ der Kante Aa erzeugt ebenfalls Parallelogramme Ba′, Cb′... dergestalt, daß das durch den Punkt a′ beschriebene Polygon a′b′c′... seine Seiten gleich und parallel mit denen der Basis ABC... hat. Diese Polygone sind daher gleich und ihre Ebenen zu einander parallel (§. 115). Jeder im Prisma durch eine der Grundfläche parallele Ebene gemachte Schnitt ist also dieser Grundfläche gleich; die entgegengesetzten Grundflächen ABC... und abc... sind mithin ebenfalls gleich und parallel. Die Entfernung der beiden Grundflächen heißt die Höhe des Prisma's.

§. 128. Die Oberfläche eines Prisma's, die beiden Grundflächen nicht mit gerechnet, wird gefunden, wenn man eine Kante Aa (Fig. 158) mit dem Umfange des auf die Kanten des Prisma's senkrecht gelegten Schnittes multiplicirt. Denn die Seitenoberfläche ist offenbar die Summe des Flächeninhalts aller das Prisma umgebenden Parallelogramme u. s. w. Ist das Prisma gerade, so ist seine Seitenoberfläche gleich dem Umfange der Grundfläche, multiplicirt mit einer der Kanten.

Anmerkung. Die Ecken des Prisma's sind sämmtlich drei-

kantig. Das Prisma hat so viele Seitenflächen, als die Grundfläche Seitenlinien hat. Man unterscheidet sie demnach in dreiseitige, vierseitige u. s. w. Ein nseitiges Prisma wird von n + 2 Ebenen eingeschlossen.

§. 129. Wenn die Grundflächen eines Prisma's Parallelogramme sind, so wird es alsdann ein Parallelepiped genannt. Die sechs gegenüberliegenden Flächen in einem Parallelepiped sind je zwei und zwei einander gleich und parallel. In der That ist die Fläche Ab (Fig. 156) gleich und parallel mit Dc, weil die Seiten der Winkel aAB und dDC einander gleich und parallel sind; ebenso ist die Fläche Bc gleich und parallel mit Ad. Zwei beliebige gegenüberliegende Flächen eines Parallelepiped's können demnach als Grundflächen desselben gelten. Umgekehrt, ein von sechs Ebenen, wovon je zwei parallel sind, eingeschlossener Körper ist ein Parallelepiped. Da die Ebene Ab die beiden parallelen Ebenen AC und ac in den parallelen Geraden AB und ab schneidet, so ist die Figur Ab ein Parallelogramm. Ebenso zeigt man, daß jede andere Fläche Bc, Ad... ein Parallelogramm ist. Man kann sich demnach den eckigen Körper (Polyeder) dadurch entstanden denken, daß sich die Linie Aa längs den Seiten der Figur ABCD immer in paralleler Richtung fortbewegt hat.

Ein Prisma ist bestimmt, sobald die Basis ABC... (Fig. 157) und die Erzeugungslinie Aa der Größe und Lage nach gegeben sind. Ein Parallelepiped (Fig. 156) ist folglich bestimmt, wenn man eine seiner Ecken und die Längen der sie bildenden Kanten Aa, AB und AD kennt.

Anmerkung. Die Grundfläche eines nseitigen Prismas ist durch 2n — 3 ihrer Stücke gegeben. Wird nun eine ausserhalb dieser Grundfläche gelegene Ecke gegeben, was drei Stücke erfordert, so ist das Prisma bestimmt. Zur Bestimmung eines Prismas sind daher im Allgemeinen 2n von einander unabhängige Stücke nothwendig.

Steht die Kante Aa senkrecht auf der Basis, und ist letztere überdies ein Rechteck, so wird das Parallelepiped ein rechtwinkliges genannt. Ein solches Parallelepiped hat lauter rechte Winkel. Jede Kante ist senkrecht auf den sie schneidenden Ebenen, weil von drei

geraden Linien Aa, AD und AB, welche durch denselben Punkt gehen, je zwei und zwei auf einander senkrecht sind, also jeder derselben auf der Ebene der beiden andern senkrecht ist. Hat das rechtwinklige Parallelepiped alle Kanten gleich, so heißt es Würfel oder Cubus.

§. 130. Die Ebene DdbB (Fig. 156), welche durch zwei entgegengesetzte Kanten geht, gibt ein Parallelogramm, dessen Diagonalen Db und Bd sich wechselseitig halbiren. Die vier Diagonalen Db, Bd, Ac, Cd treffen daher in einem und demselben Punkt zusammen; denn Bd schneidet Db in ihrer Mitte O, welche Linie Db auch durch Ac halbirt wird.

Anmerkung. Ist das Parallelepiped rechtwinklig, so sind die Diagonalschnitte Rechtecke und die Diagonalen einander gleich. Beim rechtwinklichen Parallelepiped stehen demnach alle Ecken vom Durchschnittspunkte O der Diagonalen gleich weit ab.

§. 131. Wenn eine beliebige Curve ACDB (Fig. 159) sich um eine Gerade AB als Achse dreht, so erzeugt sie eine sogenannte Umdrehungsfläche. Das charakteristische Merkmal solcher Rotationsflächen, welches auch die Erzeugungslinie sein mag, besteht darin, daß der Durchschnitt der auf der Umdrehungsachse senkrechten Ebenen und der Fläche allemal ein Kreis ist. Denn das auf AB errichtete Perpendickel DI wird während seiner Bewegung eine auf die Achse senkrechte Ebene beschreiben (§. 111), und der Punkt D dabei stets in derselben Entfernung DI von der Achse bleiben.

§. 132. Wenn eine Gerade Aa (Fig. 160) sich parallel zu sich selbst bewegt, und dabei stets durch die auf einander folgenden Punkte irgend einer krummen Linie geht, so heißt der dadurch beschriebene Körper ein Cylinder. Wir betrachten hier den Cylinder als durch zwei parallele Basen ABCD, abcd begrenzt, die Entfernung derselben ist die Höhe des Cylinders.

Anmerkung. Ist die erzeugende Gerade senkrecht auf den Grundebenen, so heißt der Cylinder gerade, sonst schief. Ist die Richtungslinie eine Kreislinie, so entsteht der kreisförmige Cylinder. Man sieht leicht ein, daß, wenn man eine gerade Linie als Richtungslinie wählte, die cylindrische Fläche in eine

Ebene übergeht. Dasselbe findet ebenfalls statt, wenn sich die Erzeugungslinie in der Ebene der als eben vorausgesetzten Richtungslinie bewegt. Man kann sich die cylindrische Fläche auch dadurch erzeugt vorstellen, daß sich die Richtungslinie zur ursprünglichen Position parallel fortbewegt, indem jeder Punkt auf derselben Kante bleibt.

Es seien nun in und um die Basis des Cylinders Vielecke beschrieben. Die Erzeugungslinie wird, indem sie auf dem Umfang derselben hingleitet, zwei Prismen beschreiben, deren Grenze offenbar der Cylinder ist, da dessen Basis die Grenze der Grundflächen der Prismen abgibt.

Anmerkung. Das eben Gesagte beruht auf einem im §. 19 angeführten analogen Satze, welchen wir nach dem über die Ausdehnung der Flächen gefaßten Begriffe, als klar an und für sich betrachten. Der Flächeninhalt einer in einer Ebene liegenden Figur ist kleiner, als der einer beliebigen krummen Oberfläche, welche von demselben Umfange als jene Figur begrenzt wird. Von zwei convexen Oberflächen, die von demselben Umfange begrenzt werden, ist diejenige, welche die andere einschließt, die größere.

Mit Leichtigkeit ergibt sich nun Folgendes:

1) Der Durchschnitt einer cylindrischen Fläche mit einer ihrer Grundfläche parallel gelegten Ebene ist dieser Grundfläche gleich.

2) Der Flächeninhalt der Seitenoberfläche eines geraden Cylinders (Fig. 161) hat zum Maß das Produkt aus dem Umfange der Grundfläche in die Höhe. Bezeichnet nämlich C den Umfang der Basis, α den Ueberschuß des Umfangs des der Basis umschriebenen Vielecks über C, so daß dieser Umfang $= C + \alpha$; stellt ferner S die Seitenoberfläche des Cylinders, β den Ueberschuß der Seitenfläche des umschriebenen Prisma's über S, so hat man, wenn $Aa = h$ gesetzt wird, $S + \beta = h\,(C + \alpha)$, woraus $S = h \times C$ (§. 22).

3) Ist der Cylinder schief (Fig. 160), so entstehen durch den auf den Kanten senkrechten Schnitt a′b′c′d′ zwei Körper Ac′, ca′, welche, wenn man ihre Grundflächen ac und AC auf einander legt, einen geraden Cylinder geben. Die Seitenoberfläche eines schiefen Cylinders

hat also zum Maß das Produkt aus der Länge der Erzeugungslinie Aa und dem Umfange eines auf den Kanten senkrechten Durchschnitts a′b′c′d′.

4) Der Flächeninhalt der Seitenoberfläche eines geraden Cylinders ist dem Flächeninhalte eines Rechtecks gleich, welches den rectifizirten Umfang der Grundfläche des Cylinders zur Basis und seine Kante zur Höhe hat. Monge nennt solches die Abwicklung dieser Fläche. Ist der Cylinder schief, so wickelt sich der auf den Kanten senkrechte Durchschnitt längs der Geraden a′d′ (Fig. 162) ab, auf welcher sämmtliche Erzeugungslinien senkrecht sind. Errichtet man daher in den verschiedenen Punkten a′, b′, c′, d′ Perpendikel, trägt dann auf dieselben ober- und unterhalb die Stücke a′a, a′A, b′b, b′B... bezüglich den Stücken jeder Erzeugungslinie ober- und unterhalb des Schnitts a′b′c′d′ (Fig. 160) gleich, so erhält man die durch zwei parallele Curven abcd, ABCD begrenzte Fläche aD als Abwicklung der gekrümmten Seitenoberfläche unsers Cylinders.

5) In den Elementen der Geometrie wird nur der Cylinder mit kreisförmiger Basis betrachtet. Die durch den Mittelpunkt der Basis zur Erzeugungslinie parallel gehende Gerade nennt man die Achse. Den geraden Cylinder kann man sich auch durch die Umdrehung eines Rechtecks AOoa um eine seiner Seiten Oo als Achse erzeugt denken. Jeder mit der Grundfläche parallel gelegte Schnitt ist bei diesem Umdrehungskörper also ein dieser Grundfläche gleicher Kreis. Die Seitenoberfläche ist $= 2\pi rh$, wo h die Höhe und r den Radius der Basis bezeichnet.

6) Der Flächeninhalt jeder Grundfläche eines geraden kreisförmigen Cylinders verhält sich zu dem Flächeninhalte seiner Seitenoberfläche, wie der Halbmesser der Basis zur doppelten Erzeugungslinie des Cylinders. Die gesammte Oberfläche des geraden Cylinders wird durch die Formel $2r\pi\,(h + r)$ ausgedrückt.

§ 133. Der Flächeninhalt der Seitenoberfläche einer Pyramide wird erhalten, indem man die einzelnen Dreiecke berechnet und die Summe derselben nimmt. Da bei einer gleichseitigen Pyramide die Seitenflächen lauter gleiche, gleichschenklige Dreiecke sind, welche das in einer Seitenfläche aus der Spitze auf die Grundseite gefällte Perpendikel (das Apothem genannt) zur gemeinschaftlichen Höhe haben, so wird die Seitenoberfläche einer solchen Pyramide durch die Hälfte

des Produkts aus dem Umfange der Grundfläche und dem Apothem gemessen. Der Flächeninhalt der gesammten Oberfläche einer gleichseitigen Pyramide hat mithin die Hälfte des Produkts aus dem Umfange der Grundfläche mit der Summe der Apothemen der Pyramide und ihrer Grundfläche zum Maße.

§. 134. Wenn sich eine unbegrenzte Gerade AS (Fig. 163) dergestalt bewegt, daß sie stets durch einen fixen Punkt S geht, und dabei längs einer gegebenen Curve fortgleitet, so nennt man den dadurch erzeugten Körper einen Kegel. Jener fixe Punkt heißt der Scheitel oder die Spitze des Kegels. Die Kegelfläche besteht aus zwei entgegengesetzten, in der Spitze mit einander verbundenen Theilen, welche die Fächer oder Aeste der Fläche heißen. Wir werden hier nur den Fall betrachten, wo die Richtungslinie ein Kreis ist. Die Gerade, welche die Spitze mit dem Mittelpunkt der Grundfläche verbindet, heißt Achse; das aus der Spitze auf die Grundfläche gefällte Perpendikel wird die Höhe genannt. Der Kegel heißt gerade oder schief, je nachdem die Achse senkrecht oder schief auf der Grundfläche steht. Ein gerader Kegel kann durch Umdrehung eines rechtwinkligen Dreiecks ASO (Fig. 164) um eine seiner Katheten SO entstanden betrachtet werden. Jede zur Basis einer kreisförmigen Kegelfläche parallele Ebene schneidet dieselbe nach einem Kreise.

Anmerkung. Jede Linie, die von der Spitze des Kegels nach irgend einem Umfangspunkt der Grundfläche gezogen wird, heißt Seitenlinie oder Seite des Kegels. Beim geraden Kegel sind die Seiten alle gleich, beim schiefen nicht. Beim geraden wie beim schiefen Kegel verhalten sich die Kreisdurchschnitte, welche durch die zur Grundfläche parallel gelegten Ebenen entstehen, wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Spitze des Kegels.

§. 135. Wenn man regelmäßige Polygone in und um die Grundfläche eines geraden Kegels beschreibt, und die Scheitel der Winkel dieser Polygone mit dem Scheitel S (Fig. 164) des Kegels durch gerade Linien verbindet, so wird man gleichseitige Pyramiden, eine eingeschriebene und eine umschriebene bilden, deren Grenze offenbar der Kegel ist.

Hieraus ergibt sich:

1) Der Flächeninhalt der Seitenoberfläche eines geraden Kegels SAC (Fig. 164) hat zum Maß das halbe Produkt aus dem Umkreis c der Basis in die Erzeugungslinie SA. Wenn α den Ueberschuß des Umfanges des der Basis umschriebenen regelmäßigen Polygons über c bezeichnet, so wird die Seitenoberfläche der umschriebenen Pyramide durch $\frac{1}{2}a(c+\alpha)$ ausgedrückt sein, wo a das Apothem SA, welches mit der Seitenlinie identisch ist, darstellt. Ist s der Flächeninhalt der Kegelfläche und β der Ueberschuß der Seitenoberfläche der Pyramide über s, so hat man $s+\beta=\frac{1}{2}a(c+\alpha)$. Hieraus folgt: $s=\frac{1}{2}ac=\pi ar$, wenn r der Radius der Basis ist.

2) Der Flächeninhalt der Grundfläche eines geraden Kegels verhält sich zu dem seiner Seitenoberfläche wie der Halbmesser der Grundfläche zu der Seite des Kegels. Die ganze Oberfläche des Kegels wird durch die Formel $\pi r(a+r)$ ausgedrückt.

3) Wenn man mit einem Radius $SA=a$ der Erzeugungslinie einen Bogen ABD (Fig. 168) gleich dem Umfang der Grundfläche beschreibt, so wird der Kreisausschnitt SAD mit der Kegelfläche einerlei Flächeninhalt haben (§. 106). Der Kreisausschnitt gibt die Abwicklung der Kegelfläche, und die Erzeugungslinien sind die verschiedenen Radien dieses Ausschnitts.

4) Wird ein Kegel durch eine Ebene parallel zur Grundfläche geschnitten, so heißt der zwischen den beiden parallelen Grundflächen enthaltene Theil des Kegels ein abgestutzter oder abgestumpfter Kegel.

Die Seitenoberfläche des abgestumpften geraden Kegels (Fig. 165) hat zum Maß das Produkt aus seiner Seite Aa und der halben Summe der Umkreise beider Grundflächen AC, ac, oder vielmehr das Produkt aus seiner Seite und dem Umkreise des in gleicher Entfernung von beiden Grundflächen gemachten Schnittes. Denn einmal sind die Schnitte ad, a′d′ Kreise; ferner ist die Seitenfläche des abgestutzten Kegels ADad die Differenz der Seitenflächen der Kegel SAD, Sad. Beschreibt man nun aus demselben Punkt S als Mittelpunkt (Fig. 168) mit den Radien SA, Sa, den Erzeugungslinien dieser Kegel, die Bogen AD, ad; nimmt dann ABD gleich dem Umfang der untern Basis; und zieht endlich die Radien SA, SD, so wird der Bogen abd gleich dem Umfang der obern Basis sein.

Denn einerseits hat man $\frac{SA}{Sa} = \frac{ABD}{abd} = \frac{\text{Umfang AC}}{abd}$; anderseits (Fig. 165) ist $\frac{SA}{Sa} = \frac{\text{Umfang AC}}{\text{Umfang ac}}$; folglich abd = Umfang ac. Hiernach sind die Kreisausschnitte SABD, Sabd dem Flächeninhalt nach den Seitenflächen der beiden Kegel gleich, desgleichen die Fläche AabdDB der Seitenfläche des abgestutzten Kegels, deren Abwicklung sie ist. Der fragliche Flächeninhalt ist mithin gleich $Aa \times a'b'd' = Aa \times \frac{1}{2}(abd+ABD)$.

Anmerkung. Ein abgestumpfter gerader Kegel kann man dadurch entstanden denken, daß sich ein Trapez, bei welchem eine der nicht parallelen Seiten senkrecht auf den beiden parallelen Seiten ist, um diese senkrechte Seite als Achse bewegte; die andere nicht parallele Seite beschreibt so die Kegelfläche.

§. 136. Wenn sich der Halbkreis ADB (Fig. 167) um seinen Durchmesser AB als Achse dreht, so erzeugt er die Kugel. Der beliebige Bogen DF oder DE beschreibt während dieser Bewegung eine Zone; der Bogen AD erzeugt eine Calotte oder Kugelmütze oder Zone mit einer Basis. Der durch die Umdrehung des Kreisausschnitts ACD beschriebene Körper heißt Kugelausschnitt oder Kugelsector; der während der Rotation durch den halben Kreisabschnitt ADI entstandene Körper dagegen Kugelabschnitt oder Kugelsegment. Hieraus folgt, daß alle Punkte der Kugelfläche von dem Mittelpunkt C gleich weit entfernt sind, und daß durch Umdrehung des erzeugenden Kreises um einen andern beliebigen Durchmesser DH dieselbe Kugel beschrieben wird. Jede durch den Mittelpunkt gehende Ebene schneidet demnach die Kugel in dem Erzeugungskreis, der auch größter Kreis genannt wird.

Der Durchschnitt der Kugel durch irgend eine Ebene ist ein Kreis. Denn ist DG eine solche schneidende Ebene, und man fällt vom Mittelpunkt C auf dieselbe die Senkrechte AB, so kann man sich die Kugel durch Umdrehung um diese Linie als Achse erzeugt denken. Der Durchmesser dieses Kreises ist die Sehne DG. Die Kreise, deren Ebenen nicht durch den Mittelpunkt gehen, werden deshalb kleinere Kreise genannt. Die Basis eines Kugelabschnitts ist ein kleiner Kreis.

Anmerkung. Zwei größte Kreise halbiren einander; denn ihre

Durchschnittslinie geht durch den Mittelpunkt der Kugel und ihre Endpunkte liegen auf der Kugelfläche; sie ist mithin ein Durchmesser. — Kreise, deren Ebenen parallel untereinander sind, werden Parallelkreise genannt; sie sind um so kleiner, je weiter sie von dem Mittelpunkt der Kugel abliegen.

§. 137. Die Ebene, welche mit der Kugel nur einen Punkt gemein hat, heißt Berührungsebene. Jede von dem Mittelpunkt C (Fig. 167) nach dieser Ebene gehende Gerade ist länger als der nach dem Berührungspunkt gezogene Radius CA, da sie die fragliche Ebene nur ausserhalb der Kugel erreichen kann. Der Radius steht folglich auf der berührenden Ebene senkrecht (§. 111).

Wenn umgekehrt der Radius CA die kürzeste Linie ist, welche man vom Mittelpunkt auf eine Ebene ziehen kann, so hat diese Ebene mit der Kugel nur einen Punkt A gemein, sie ist mithin eine tangirende Ebene. Denn da jede andere vom Mittelpunkt C nach der Ebene geführte Linie die CA übertrifft, so müssen die Durchschnittspunkte der Ebene und jener Linien ausserhalb der Kugeln liegen. — Läßt man eine Tangente AT, desgleichen den Halbkreis ADB um AB sich drehen, so beschreibt AT die die Kugel in A berührende Ebene.

§. 138. Wenn man ein Polygon ABDI... (Fig. 169) sich um die Linie AO als Achse drehen läßt, so wird jede Seite DI einen abgestumpften Kegel erzeugen, dessen Seitenoberfläche durch DI × Umkreis KL ausgedrückt wird, wenn man aus der Mitte K dieser Seite die Senkrechte KL auf die Drehungsachse AO zieht. Es hat also keine Schwierigkeit, die Oberfläche des durch das Polygon beschriebenen Körpers zu finden. Ist dasselbe regelmäßig, so läßt sich diese Oberfläche noch leichter erhalten. Es sei deshalb ein Kreis eingeschrieben, DG parallel zur Drehungsachse, und der Radius KC gezogen. Die Dreiecke DIG und LKC sind ähnlich, weil die Seiten des einen auf den Seiten des andern senkrecht stehen; sie geben also: $\frac{DI}{DG} = \frac{KC}{KL} = \frac{\text{Umkreis KC}}{\text{Umkreis KL}}$. Hieraus folgt: DI × Umkreis KL = DG × Umkreis KC; d. h. die Oberfläche des abgestumpften Kegels HDIM ist durch das Produkt seiner Höhe DG oder HM in den Umfang des dem Polygon eingeschriebenen Kreises gemessen. — Das Nämliche findet offenbar für den durch die zu AO parallele Seite IP

erzeugten Cylinder statt. Was den Kegel anlangt, welchen die Seite BA beschreibt, so ist die Seitenfläche desselben durch $\frac{1}{2}$BA × Umkreis BN ausgedrückt (§. 135). Die ähnlichen Dreiecke ABN und QCA geben aber ebenfalls QA × Umkreis BN = AN × Umkreis QC. Die Oberfläche des durch mehrere Seiten eines regelmäßigen Polygons erzeugten Körpers ist daher gleich der Summe der Höhen multiplicirt mit dem Umfang des eingeschriebenen Kreises. Für unsern Beweis ist es hinreichend, daß das erzeugende Polygonstück dem Kreis umschreibbar sei. Es ist aber einleuchtend, daß die Calotte oder Zone die Grenze der durch ein solches Polygonstück erzeugten Oberfläche ist.

Hieraus folgt:

1) Der Flächeninhalt der Calotte DAG oder der Zone DFNG (Fig. 167) ist gleich dem Produkte ihrer Höhe AI oder KI in den Umfang eines größten Kreises. Bezeichnet man den Radius der Kugel durch r, und durch h die Höhe der durch DA erzeugten Calotte, oder der durch den Bogen FD oder FE beschriebenen Zone; so hat man Oberfläche der Zone = $2\pi rh$.

2) Nimmt man den Durchmesser AB als Höhe an, so findet man, daß die Oberfläche der ganzen Kugel gleich ihrem Durchmesser multiplicirt mit dem Umfange eines größten Kreises, oder viermal größer als die Fläche ihres größten Kreises ist. Die Oberfläche der Kugel ist folglich = 2r × Umkreis · r = $4\pi r^2$, oder beinahe = d (3 + $\frac{1}{7}$) d, wo d den Durchmesser darstellt.

3) Um den Radius der Kugel aus der Oberfläche A zu finden, hat man die Gleichung $r = \sqrt{\frac{A}{4\pi}} = \sqrt{(0{,}079578)A}$.

4) Legt man an den Kreis die Tangenten DE, DG, GF, EF (Fig. 170) senkrecht und parallel zum Durchmesser AB, so erzeugt das halbe Quadrat EA durch seine Umdrehung um AB den der Kugel umschriebenen Cylinder. Die Oberfläche der durch irgend einen Bogen b′f′ beschriebenen Zone ist gleich der Seitenfläche des Cylinders aea″e″, weil ihr beiderseitiger Werth = dg × Umkreis AC. Es wird daher für den ganzen Cylinder in Bezug auf die Kugel dasselbe gelten. Die Oberfläche der Kugel ist folglich der Seitenfläche des umschriebenen Cylinders gleich. Werden die Grundflächen mit inbegriffen, so beträgt die Oberfläche der Kugel $\frac{2}{3}$ von der des Cylinders, weil

jene Grundflächen größte Kreise sind, von denen 4 auf die Oberfläche der Kugel und 6 auf die Gesammtoberfläche des Cylinders gehen.

5) Es sei HIK (Fig. 170) das um den Kreis beschriebene gleichseitige Dreieck. Läßt man sich das halbe Dreieck um HB drehen, so erzeugt es den der Kugel umschriebenen Kegel. Die Gerade IC halbirt den Winkel HIB, der $\frac{2}{3}$R macht. Der Bogen Bi ist daher der sechste Theil des Umkreises, und die Sehne Bi die Seite des regelmäßigen Sechsecks = BC = r. Ferner ist das Dreieck BIi gleichschenklig, mithin Ii = Bi = r und IC = 2r. Das Dreieck CIB gibt $IB^2 = IC^2 - CB^2 = 3r^2$; folglich Umkreis $IB = 2\pi r\sqrt{3}$. Die erzeugte Kegelfläche ist daher $= 6\pi r^2$, oder gleich 6 mal der Fläche eines größten Kreises, oder das Doppelte der Basis, welche $= 3\pi r^2$ ist. Die gesammte Oberfläche wird demnach durch $9\pi r^2$ ausgedrückt. Die Grundflächen mit gerechnet, beträgt also die Oberfläche des Cylinlinders 6 mal, die des Kegels 9 mal, und die der Kugel 4 mal die Fläche des größten Kreises; d. h. die Oberfläche des umschriebenen Cylinders ist mittlere Proportionale zwischen der Oberfläche der Kugel und der des umschriebenen Kegels.

6) Dieser Satz findet auch für den der Kugel eingeschriebenen Kegel und Cylinder statt, welche den dem Erzeugungskreis eingeschriebenen Quadrat und gleichseitigem Dreieck entsprechen. Die gesammte Oberfläche des Cylinders ist $= 3\pi r^2$, die des Kegels $= \frac{9}{4}\pi r^2$ und die der Kugel $= 4\pi r^2$.

Von der Gleichheit, Aehnlichkeit und Symmetrie der Körper.

§. 139. Leicht läßt sich die Richtigkeit der in diesem Paragraphen enthaltenen Sätze über die Gleichheit der eckigen Körper nachweisen.

1) Wenn die Ecken zweier dreiseitigen Pyramiden aus gleichen und übereinstimmig liegenden Dreiecken zusammengesetzt sind, so sind diese Pyramiden vollkommen gleich. Sie sind es auch dann noch, wenn zwei ähnlich liegende Dreiecke paarweise einander gleich sind, und einen gleich großen Flächenwinkel einschließen. Sie sind ferner einander gleich, wenn sie ein gleiches Dreieck haben, und die an diesen Dreiecken liegenden Flächenwinkel zwei und zwei einander gleich und übereinstimmig liegend sind.

2) Zwei vielseitige Pyramiden sind einander gleich, wenn sie eine gleiche dreikantige Ecke haben, welche von drei einzeln gleichen und übereinstimmig liegenden Figuren gebildet wird.

Anmerkung. Die Grundfläche einer nseitigen Pyramide ist bestimmt, wenn man (2n—3) ihrer Stücke kennt. Die Lage ihrer Spitze gegen die Grundfläche ergibt sich aus drei Stücken. Die nseitige Pyramide erfordert demnach im Allgemeinen 2n von einander unabhängige Bestimmungsstücke.

3) Zwei Prismen sind einander gleich, wenn die Seitenflächen einer Ecke des einen den Seitenflächen einer Ecke des andern der Ordnung nach wechselseitig gleich sind.

4) Zwei Polyeder sind gleich, wenn sie aus einer gleichen Anzahl gleicher und ähnlich liegender dreiseitiger Pyramiden zusammengesetzt sind; und umgekehrt, zwei gleiche eckige Körper lassen sich in gleich viele paarweise gleicher und ähnlich liegender dreiseitiger Pyramiden zerlegen.

Anmerkung. Ein Polyeder mit n Ecken erfordert im Allgemeinen 3n—6 Bestimmungsstücke. Die erste dreiseitige Pyramide ist durch 6 Stücke bestimmt. Es sind dann noch (n—4) Ecken vorhanden, wovon eine jede zu ihrer Bestimmung eine dreiseitige Pyramide verlangt. Jede dieser (n—4) dreiseitigen Pyramiden erfordert 3 Stücke, was zusammen $6+3(n-4)=3n-6$ Bestimmungsstücke macht.

§. 140. Aehnliche Polyeder sind solche, die die körperlichen Ecken in derselben Ordnung genommen, gegenseitig vollkommen gleich haben und von gleich vielen ähnlichen und ähnlich liegenden Figuren begrenzt werden.

Wird eine dreiseitige Pyramide SBAC (Fig. 171) durch eine der Grundfläche ABC parallele Ebene abc geschnitten, so erhält man eine Pyramide Sabc, welche der ganzen ähnlich ist. Wegen des Parallelismus der Geraden AC und ac, BC und bc, AB und ab sind die Dreiecke SAB und Sab, SBC und Sbc, SAC und sac je zwei einander ähnlich. Auch sind die Dreiecke ABC und abc einander ähnlich, weil sie ihre Winkel gegenseitig gleich haben; folglich sind alle Seitenflächen in beiden Körpern einzeln genommen ähnlich. Hinsichtlich der körperlichen Winkel ist die Ecke S beiden gemein, und die übrigen sind in beiden auf einerlei Art geordnet.

Zwei dreiseitige Pyramiden sind ähnlich:

1) Wenn sie zwei paarweise ähnliche und ähnlich liegende Seitenflächen SAC und S′A′C′, BSA und B′S′A′ (Fig. 171) haben, welche einen gleichen Flächenwinkel einschließen.

2) Wenn ihre homologen Kanten proportional, oder ihre Seitenflächen der Ordnung nach gegenseitig ähnlich sind.

3) Wenn sie eine ähnliche Fläche haben und die daran liegenden Flächenwinkel in derselben Ordnung wechselseitig gleich sind.

§. 141. Wird irgend eine Pyramide SABC... (Fig. 151) parallel mit der Grundfläche geschnitten, so ist die hinweggenommene Pyramide Sabc... der ganzen ähnlich. Der Beweis ist ganz derselbe wie oben.

Irgend zwei Pyramiden sind ähnlich:

1) Wenn sie von gleich vielen der Ordnung nach ähnlichen Figuren begrenzt sind. Es seien SABC... und S′A′B′C′... (Fig. 151) zwei solche Pyramiden. Nimmt man nun Sa = S′A′ und legt durch den Punkt a die Ebene ad parallel zur Grundfläche AD, so erhält man eine Pyramide Sabc... welche der Pyramide SABC... ähnlich ist und der Pyramide S′A′B′C′... vollkommen gleich sein wird.

2) Pyramiden sind ähnlich, wenn sie ähnliche Grundflächen haben, und zwei an einander grenzende Seitenflächen der einen den homologen Seitenflächen der andern ähnlich und ähnlich liegend sind.

3) Sie sind auch ähnlich, wenn bei ähnlichen Grundflächen eine Seitenfläche der einen der homologen Seitenfläche der andern ähnlich und ähnlich liegend ist, und mit der Grundfläche denselben Flächenwinkel bildet.

§. 142. Wenn zwei Pyramiden (Fig. 151) aus gleich vielen der Ordnung nach ähnlichen dreiseitigen Pyramiden zusammengesetzt sind, so sind jene Pyramiden ähnlich. Es seien die dreiseitigen Pyramiden S′A′B′E′, S′E′B′D′, S′B′C′D′ den Pyramiden SABE, SEBD, SBCD beziehungsweise ähnlich. Leicht läßt sich darthun, daß die ganzen Pyramiden die Seitenflächen der Ordnung nach ähnlich und auch die Grundflächen ähnlich haben, was die Aehnlichkeit der Pyramiden nach sich zieht. Eben so leicht beweist man die Richtigkeit des umgekehrten Satzes: Zwei ähnliche Pyramiden können in gleich viele der Ordnung nach ähnliche dreiseitige Pyramiden zerlegt werden,

wenn man in den ähnlichen Grundflächen ähnlich liegende Diagonalen zieht, und durch diese und die Spitzen der Pyramiden Ebenen legt.

§. 143. Zwei Polyeder, welche aus derselben Anzahl ähnlicher und ähnlich liegender dreiseitiger Pyramiden zusammengesetzt sind, sind einander ähnlich. Denn die homologen Flächen der Polyeder sind entweder als homologe Flächen ähnlicher dreiseitiger Pyramiden, oder als Summen ähnlicher und auf eine übereinstimmige Weise verbundener Dreiecke, einander ähnlich. Ebenso sind die körperlichen Winkel als Summen gleicher und auf dieselbe Weise mit einander verbundener dreikantiger Ecken einander gleich.

Bemerkt kann noch werden, daß wenn mehrere Flächen der dreiseitigen Pyramiden, welche das erste Polyeder bilden, in einerlei Ebene liegen, die homologen Flächen der dreiseitigen Pyramiden, welche zum zweiten Polyeder gehören, ebenfalls in einerlei Ebene liegen.

Sind umgekehrt zwei Polyeder ähnlich, so lassen sie sich in dieselbe Anzahl ähnlicher und ähnlich liegender dreiseitiger Pyramiden zerlegen. Denn wählt man in beiden Körpern zwei homologe Ecken und verbindet die Scheitel der letztern mit den Scheiteln aller übrigen durch Diagonalen und legt dann die gehörigen Diagonalschnitte, so werden die Polyeder auf diese Weise in gleich viele dreiseitige Pyramiden zerlegt, welche wechselseitig dieselbe Lage gegen einander haben. Die eine Klasse von dreiseitigen Pyramiden sind nun ähnlich, weil sie zwei ähnliche, ähnlich liegende und einen gleichen Flächenwinkel einschließende Flächen haben. Die andere Klasse von dreiseitigen Pyramiden sind ähnlich, weil sie aus homologen Flächen der dreiseitigen Pyramiden der vorigen Klasse zusammengesetzt sind, und die von ihnen eingeschlossenen Winkel die Unterschiede gleicher Flächenwinkel der beiden Polyeder und gleicher Flächenwinkel jener erstern Pyramiden sind.

Die homologen Kanten und Diagonalen ähnlicher Polyeder sind einander proportional. Die Seiten der homologen Flächen sind durch eine Reihe gleicher Verhältnisse mit einander verbunden, woraus das Gesagte sich ergibt.

§. 144. Wenn man von einem innerhalb eines Polyeders angenommenen Punkt nach allen Ecken Linien zieht, und solche ihrer

Länge proportional verlängert, so werden die durch die Endpunkte dieser Linien zu den Seitenflächen des Polyeders parallel geführten Ebenen ein Polyeder bilden, das dem ursprünglichen ähnlich ist. — Dieser Satz ist dem in §. 92 ganz analog.

Da Linien, welche vier homologe Ecken ABCD, abcd (Fig. 172) zweier ähnlicher Körper verbinden, unter einander proportional sind, so bilden diese Linien ähnliche dreiseitige Pyramiden. Hieraus folgt, daß, wenn man von den Scheiteln ABC, abc homologer Dreiecke Linien nach allen Ecken DEF..., def..., zweier ähnlicher Polyder zieht, die dadurch gebildeten dreiseitigen Pyramiden gegenseitig einander ähnlich sind. — Es ist dieser Satz dem im §. 89 analog.

Umgekehrt, zwei Polyeder sind ähnlich, wenn die dreiseitigen Pyramiden, welche man dadurch erhält, daß man die Ecken der beiden Polyeder zu drei homologen Scheiteln ABC, abc derselben durch gerade Linien verbindet, paarweise einander ähnlich sind. In der That sind die dreiseitigen Pyramiden DABC, dabc, desgleichen die Pyramiden EABC, eabc einander ähnlich, also sind die Flächenwinkel DABC, EACB den Flächenwinkeln dacb, eacb gegenseitig gleich, mithin der Flächenwinkel DACE = dace. Ueberdies sind die Flächen DAC, dac, desgleichen die Flächen EAC, eac unserer dreiseitigen Pyramiden einander ähnlich. Die dreiseitigen Pyramiden EACD, eacd sind folglich einander ähnlich, und man hat $\frac{DE}{de} = \frac{AC}{ac}$. — Es seien F, f, I, i homologe Ecken. Man erhält ebenso $\frac{FE}{fe} = \frac{AC}{ac}$ und $\frac{DF}{df} = \frac{AC}{ac}$. Die Körper haben also ihre homologen Seiten proportional und die homologen Dreiecke DFE, dfe ähnlich. Ueberdies sind die Flächenwinkel gleich, weil IDF ähnlich zu idf, IFE ähnlich zu ife; woraus Winkel IFD = ifd, IFE = ife, DFE = dfe. Liegen ausserdem die Punkte D, I, F, E in einerlei Ebene, so verwandelt sich die Gleichung IFE = IFD + DFE in folgende ife = ifd + dfe; woraus folgt, daß die Punkte e, f, i, d ebenfalls in einerlei Ebene liegen. Die Seitenflächen der Polyeder sind also einander ähnlich, die körperlichen Ecken sind endlich gleich, als Inbegriffe gleicher und auf einerlei Weise zusammengesetzter dreikantiger Ecken. Die Polyeder vereinigen demnach alle Kennzeichen der Aehnlichkeit.

§. 145. In zwei ähnlichen Polyedern verhalten sich die Flächeninhalte der Seitenflächen derselben wie die Quadrate ihrer homologen Seiten. Da nun die Seiten der Polyeder einander proportional sind, so ergibt sich hieraus, daß die Verhältnisse der homologen Flächen einander gleich sind. Die Oberflächen ähnlicher Polyeder verhalten sich sonach wie die Quadrate ihrer homologen Seiten.

Leicht läßt sich zeigen, daß die Oberflächen ähnlicher Kegel oder Cylinder, d. h. solcher, die durch zwei ähnliche Dreiecke oder Rechtecke erzeugt werden, den Quadraten ihrer Erzeugungslinien proportional sind. In der That sind die Umkreise C und c der Grundflächen den Erzeugungslinien A und a proportional; die Oberflächen S und s verhalten sich hiernach wie die Produkte $C \times A$ und $c \times a$ (§. 123 und 135), woraus $\frac{S}{s} = \frac{A^2}{a^2}$. Ebenso verhalten sich die Oberflächen der Kugeln wie die Quadrate ihrer Halbmesser, da diese Flächen viermal so groß als die größten Kreise sind.

§. 146. Zwei Polyeder werden symmetrisch genannt, wenn man sie, den einen unterhalb, den andern oberhalb einer Ebene MN (Fig. 173) dergestalt legen kann, daß die Scheitel der körperlichen Ecken A, a, B, b... je zwei und zwei von dieser Ebene gleich weit entfernt sind und in derselben Senkrechten Aa, Bb... auf dieser Ebene liegen. Es sei B eine Ecke des erstern Körpers; fällt man nun das Perpendikel BQb auf die Ebene MN, nimmt dann Qb = QB, so wird b die homologe Ecke des zweiten Körpers sein.

Symmetrische Körper haben ihre sämmtlichen Stücke gegenseitig einander gleich. Um dies zu beweisen, stellen wir uns vor, daß das Trapez ABPQ sich um PQ drehe, bis es unterhalb der Ebene MN in eine darauf senkrechte Lage gekommen ist. Da die Linien AP, aP gleich und senkrecht auf MN sind, so werden sie zusammenfallen. Dasselbe findet bei den Linien BQ und bQ statt, woraus AB = ab; die homologen Seiten sind folglich einander gleich. Es seien D, d, C, c symmetrische körperliche Ecken; man hat dann BC = bc, AC = ac, mithin Dreieck ABC = abc; die homologen Driecke sind daher ebenfalls einander gleich. Da nun Dreieck ADC = adc, BDC = bdc; so ist Winkel DCB = dcb, ACD = acd, ACB = acb.

Wenn die Ebenen dieser Dreiecke in C und c dreikantige Ecken

bilden, so sind solche einander gleich. Die homologen Flächenwinkel und dreikantigen Ecken sind daher gleich. Dasselbe gilt von den vielkantigen Ecken, indem sie aus gleichen dreikantigen Ecken in ähnlicher Ordnung zusammengesetzt sind.

Wenn ferner die Punkte A, B, C, D in einerlei Ebene liegen, so folgt aus der Gleichung DCB = ACD + ACB die Gleichung dcb = acd + acb; d. h. die Punkte a, b, c, d liegen ebenfalls in einerlei Ebene. Die homologen Flächen sind also auch gleich, da sie aus gleichen und ähnlich liegenden Dreiecken bestehen.

§. 147. Jedes Parallelepiped ACc (Fig. 174) wird aus zwei dreiseitigen symmetrischen Prismen ABd, BCd zusammengesetzt; die entgegengesetzten Flächenwinkel sind gleich, die entgegengesetzten dreikantigen Ecken sind symmetrisch. Die beiden Körper Aabd, Ccbd sind offenbar Prismen (§. 127); die Basis BDC oder bdc wird gleich ABD sein. Nähern wir nun diese dreiseitigen Prismen einander, indem wir bdc mit ABD zusammenfallen lassen, nämlich bc mit AD, und dc mit AB; so wird Ccbd die Lage AEHI nehmen. Die auf die Grundflächen errichteten Perpendikel aF, Cf sind aber einander gleich (§. 113); ferner Aa = Cc, und Winkel Aaf = cCf; folglich Dreieck AaF = CcF, woraus AF = cf. Aus einem ähnlichen Grunde ist fb = DF. Die gleichen Dreiecke ADF, bcf decken demnach einander, und der Punkt f fällt in F, und die Linie fC auf FE, die Verlängerung von aF. Der Scheitel E oder C ist also symmetrisch mit a. Auf ähnliche Weise zeigt man, daß I oder B symmetrisch mit d, H oder D es mit b ist.

Viertes Kapitel.

Vom Volumen.

Ausmessung der Volumen.

§. 148. Der von der Oberfläche eines Körpers eingeschlossene Raum wird das Volumen (körperlicher Inhalt) desselben genannt.

Körper von verschiedener Gestalt können gleiches Volumen haben, so wie verschiedenartige ebene Figuren gleichen Flächeninhalt einschließen können.

Ein schiefes Prisma AD (Fig. 176) in ein gerades Prisma mit Beibehaltung der Länge der Erzeugunslinie AC zu verwandeln. Man verlängere die Kanten CA, DB, lege auf solche die beliebige senkrechte Ebene MN, mache dann Pp = BD, und führe endlich die Ebene op parallel mit MN, so erhält man das gerade Prisma Op. Legen wir die abgeschnittenen Prismen BAOP, DCop dergestalt an einander, daß die Basis op auf die ihr gleiche OP zu liegen kommt, so werden, da die Erzeugungslinien senkrecht auf den Basen stehen und überdies gleich sind (denn DB = Pp gibt BP = pD, und so mit den übrigen) die Prismen zusammenfallen, d. i. oD = OB. Zieht man beiderseits das gemeinschaftliche Stück Ap ab, so bleibt das schiefe Prisma AD dem geraden Op gleich.

§. 149. Man kann zwei symmetrische Prismen AD, ad (Fig. 176) in Bezug auf eine Ebene MN immer so legen, daß diese Ebene auf der Erzeugungslinie senkrecht ist. Wir verlängern deshalb die Kante DB, nehmen alsdann vom Punkte P aus, dem Durchschnittspunkte dieser Kante, mit der beliebigen senkrechten Ebene MN, die Linie Pb = PB, Pd = PD, oder BD = bd. Verfahren wir ebenso mit jeder andern Kante, so entsteht das zu AD symmetrische Prisma ad.

Die symmetrischen Prismen AD und ad sind dem Rauminhalte nach gleich. Denn nehmen wir Pp = Pp′ = BD, und ziehen die Ebenen op, o′p′ parallel zu MN, so sind die geraden Prismen OPop, OPo′p′ den vorgelegten Prismen gleich (§. 148). Ueberdem sind die erstern einander gleich, weil, wenn man sie aneinander legt, so daß die Basis o′p′ des einen auf die ihr gleiche Basis OP des andern fällt, ein Decken statt findet.

§. 150. Zwei Parallelepipeden von einerlei Höhe und Grundfläche sind einander gleich. Um dies zu beweisen, wollen wir jene Körper so einander nähern, daß sie mit ihren untern Basen zusammenfallen; die obern liegen in einerlei Ebene. Zwei Fälle sind nun zu unterscheiden:

1) Wenn die Seitenflächen FG, EK (Fig. 175) in einer und derselben Ebene liegen. Die gleichen Dreiecke EGH, FIK dienen den vollkommen gleichen Prismen EHM, FIN als Grundflächen. Zieht

man nun von dem ganzen Körper EN einerseits das Prisma EHM und anderseits das Prisma FIN ab, so werden die übrigbleibenden Parallelepipeden EFIM, EHNL einander gleich sein.

2) Wenn die Seitenflächen irgend eine beliebige Lage haben. Die obern Basen AC, ac (Fig. 178) sind den der untern Basen MN gleiche Parallelogramme; mithin sind die Seiten BA, CD, ba, cd gleich und parallel. Dasselbe gilt für die Seiten AD, BC, ad, bc. Verlängern wir diese Linien, so bilden wir das den Parallelogrammen AC und ac gleiche Parallelogramm A′C′. Betrachten wir aber das Parallelepiped, welches A′C′ zur obern Basis und die nämliche untere Basis MN wie die vorgelegten Körper hat, so finden wir, daß es jedem einzeln derselben gleich ist, da es sich in Bezug auf sie in dem vorhergehenden Falle befindet. Die vorgelegten Parallelepipeden sind also einander gleich.

§. 151. Es läßt sich also leicht ein gegebenes Parallelepiped in ein gleich großes rechtwinkliges verwandeln. Man errichtet deshalb aus jedem Scheitel der untern Basis ABCD (Fig. 177) senkrechte Linien auf dieselbe. Dadurch wird das vorgelegte Parallelepiped in ein gleich großes gerades ABEI verwandelt, das in der Figur weiter auszuführen unnöthig ist. Zieht man darauf in der Grundfläche AC die Linien AF, BG senkrecht auf die Seite AB, so verwandelt man das gerade Parallelepiped in ein rechtwinkliges ABHK, weil es dieselbe Basis AM und dieselbe Höhe AF hat.

§. 152. **Rechtwinklige Parallelepipede von einerlei Grundfläche verhalten sich zu einander wie ihre Höhen.** Sind die Höhen commensurabel, so theilt man den Körper durch parallele Schnitte in gleiche Theile, und verfährt alsdann hinsichtlich des Beweises, wie man bei den Rechtecken gethan (§. 97). Ebenso beweist man den Satz für den Fall, daß die Höhen incommensurabel sind.

Die rechtwinkligen Parallelepipeden P und p von einerlei Höhen verhalten sich zu einander wie ihre Grundflächen. Man stelle diese beiden Körper so aneinander, daß eine ihrer körperlichen Ecken und ihre gleiche Kante zusammenfallen. Die Grundflächen befinden sich hiernach in einer Lage wie AC (Fig. 179) für P, und AK für p. Verlängert man nun IK bis H, so wird über der Basis AH ein Parallelepiped Q bestimmt, das mit den vorgelegten Körpern einerlei Höhe hat. Vergleicht man nun die

Parallelepipede P und Q, welche das Rechteck AB zur Grundflächen haben, so erhält man $\frac{P}{Q} = \frac{AD}{AI}$. Die beiden Parallelepipede Q und p, welche dieselbe Basis AIGF haben, geben aber $\frac{Q}{p} = \frac{AE}{AL}$. Multiplicirt man diese beiden Gleichungen Glied für Glied miteinander, so kommt $\frac{P}{p} = \frac{AD \times AE}{AI \times AL} = \frac{\text{Basis AC}}{\text{Basis AK}}$.

Zwei rechtwinklige Parallelepipede P und p verhalten sich endlich wie die Produkte ihrer Grundflächen in ihre Höhen. Denn sind AC und AK die Grundflächen, AG und AO die Höhen, so erweitert man die Seitenflächen desjenigen Parallelepipedes p, welches die kleinere Höhe hat, bis zur obern Basis des andern Parallelepipeds P. Man bestimmt dadurch das Parallelepiped ALFKG = R, welches mit P einerlei Höhe H und mit p einerlei Grundfläche AK hat. Man erhält hiernach einerseits $\frac{R}{p} = \frac{AG}{AO}$, und anderseits $\frac{P}{R} = \frac{AC}{AK}$; woraus $\frac{P}{p} = \frac{AC \times AG}{AK \times AO}$.

Bezeichnet man mit H, I, K die Kanten einer dreikantigen Ecke A von P, die von p mit h, i, k, so hat man $\frac{P}{p} = \frac{H \cdot I \cdot K}{h \cdot i \cdot k}$.

Um also das Maß des Volumens eines rechtwinkligen Parallelepipeds P zu erhalten, d. h. um sein Verhältniß zu einem andern p, als Einheit angenommen, zu finden, wird man die Verhältnisse $\frac{H}{h}, \frac{I}{i}, \frac{K}{k}$ der drei respectiv an einer Ecke liegenden Kanten suchen, und diese drei Zahlen mit einander multipliciren. Stellt l das Produkt dieser drei Verhältnisse dar, wo l eine abstracte Zahl bedeutet, so ist das Volumen des fraglichen Parallelepipeds lmal dem Volumen des als Einheit angenommen Parallelepipeds gleich.

Das rechtwinklige Parallelepiped hat zum Maß das Produkt der Grundfläche in die Höhe, wenn man den Würfel, dessen Seite gleich der Längeneinheit ist, als Volumeneinheit annimmt. Denn setzt man h = i = k = 1, so erhält man P·I·K für das Volumen von P, wo H, I und K abstracte Zahlen sind, die angeben, wie oft die Kanten unsers Parallelepipeds P die Einheitslänge enthalten. Stellt l das Produkt H·I·K dar, so verwandelt sich die Gleichung P = H·I·K, in P

= 1 mal dem als Volumeneinheit angenommenen Würfel. Ist H = I = K, so hat man $P = H^4$; und daher kommt es, daß man die dritte Potenz einer Zahl ihren Cubus nennt.

Anmerkung. Im Allgemeinen kann man ein rechtwinkliges Parallelepiped nicht in einen Würfel, wie ein Rechteck in ein Quadrat, verwandeln, indem sich die Cubikwurzel nicht geometrisch ausziehen läßt, wie solches bei der Quadratwurzel der Fall ist.

Die im Alterthume so berühmte Aufgabe von der Verdoppelung des Würfels, welche darin besteht, die Seite eines Würfels zu finden, dessen Volumen doppelt so groß, als des einen gegebenen ist, hat man auf mannigfache Weise geometrisch zu lösen versucht. Arithmetisch läßt sich die Auflösung leicht bewerkstelligen. Denn ist a die Seite des gegebenen Würfels und x die des doppelten, so hat man die Gleichung $x^3 = 2a^3$; woraus $x = a\sqrt[3]{2}$.

Man nennt dies Problem gewöhnlich das Delische, weil das Orakel zu Delos bei Gelegenheit einer Pest den Altar, der ein Würfel war, ohne seine Gestalt zu ändern, verdoppelt haben wollte.

§. 153. Das Volumen eines Prisma's hat zum Maß das Produkt aus seiner Grundfläche in seine Höhe.

1) Jedes Parallelepiped ist nämlich so groß wie ein rechtwinkliges, das mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat (§. 150.)

2) Ist das Prisma dreiseitig, wie ABD, adb (Fig. 174), so bildet man vorerst das Parallelepiped Ac. Das Volumen unseres Prismas ist dem seines symmetrischen BDCbdc gleich (§. 149). Das Volumen eines jeden dieser Prismen hat folglich zum Maß die Hälfte des Produkts der Grundfläche AC in seine Höhe, oder vielmehr das Produkt aus seiner Grundfläche ABD in seine Höhe.

3) Das Volumen eines jeden andern Prisma's Ad (Fig. 157) läßt sich auf dieselbe Weise ausdrücken. Denn zerlegt man das Vieleck ABCDE durch Diagonalen AC, AD in Dreiecke, und führt durch diese Diagonalen und durch die ihnen anliegenden parallelen Kanten Ebenen, so theilt man das Prisma Ad in dreiseitige Prismen von gleicher Höhe. Die Summe der Volumen dieser Prismen wird also

zum Maß das Produkt der gemeinschaftlichen Höhe in die Summe der Basen ABC, ACD, ADE, oder in die Basis ABCDE haben.

Man schließt hieraus, daß sich die Volumen irgend zweier Prismen wie die Produkte ihrer Grundfläche und Höhe verhalten, mithin wie ihre Höhen, wenn sie gleiche Grundflächen, oder wie ihre Grundflächen, wenn sie gleiche Höhe haben.

§. 154. Das Volumen V eines Cylinders hat zum Maß das Produkt aus seiner Grundfläche B in seine Höhe H. Denn bezeichnet man durch β die Größe, um welche die Basis des umschriebenen Prisma's die des Cylinders übertrifft, und durch α den Ueberschuß des Volumen dieses Prisma's über das des Cylinders, so hat man $V + \alpha = (B + \beta) H$. Hieraus folgt $V = BH$, weil das Volumen des Cylinders die Grenze der Prismen ist, d. h. die Größen α und β sich in dem Falle des §. 22 der Algebra befinden.

§. 155. Pyramiden von gleichen Grundflächen und Höhen sind gleich groß. Um dies zu beweisen, schneiden wir eine dreiseitige Pyramide durch Ebenen, welche ihrer Grundfläche parallel sind und gleichen Abstand von einander haben. Es sei ACcbaB (Fig. 180) eines der auf diese Weise erhaltenen Körperstücken. Durch die Punkte A, C, a, c lege man Linien parallel zur Kante Bb. Es entstehen dadurch zwei Prismen, von denen das eine BDFcba innerhalb, das andere BACcbi ausserhalb dem betrachteten abgeschnittenen Pyramidenstücke liegt. Den Unterschied dieser Prismen bildet das Prisma DCea, welches mit ihnen einerlei Höhe hat und dessen Basis CFDA die Differenz zwischen den Basen ABC, abc ist.

Verfährt man ebenso mit jedem andern abgeschnittenen Pyramidenstücke, so erhält man eine Reihe von Prismen, wie De, welche alle einerlei Höhe haben. Es ist aber klar, daß wenn man von der Grundfläche der vorliegenden dreiseitigen Pyramide ausgeht, das innere Prisma DFbB in jedem Abschnitt dem äussern des darüber befindlichen Abschnitts gleich ist. Der Unterschied zwischen allen innern und allen äussern Prismen ist daher dem untersten äussern Prisma gleich, dessen Grundfläche mit der Grundfläche BMN der dreiseitigen Pyramide zusammenfällt und dessen Höhe die Dicke der Abschnitte ist. Je größer nun die Anzahl dieser Abschnitte ist, um so mehr nimmt ihre Dicke ab.

Man kann also den Unterschied zwischen der Summe der äussern und innern Prismen, mithin auch um so mehr den Unterschied zwischen der dreiseitigen Pyramide und der Summe der innern Prismen so klein nehmen, als man nur immer will.

Es ist einleuchtend, daß sich eine ähnliche Schlußweise auf jede andere Pyramide mit beliebiger Basis anwenden läßt. Es seien unter dieser Voraussetzung jetzt zwei Pyramiden P und p von gleicher Höhe, deren gleich große Grundflächen auf einerlei Ebene stehen. Wir stellen uns die beiden Pyramiden durch eine Reihe zu den Grundflächen parallelen und gleichen Abstand von einander habenden Ebenen geschnitten vor, und sodann auf jeder die gedachten innern Prismen construirt. Bezeichnen α und β die Größen, um welche die Pyramiden die Summe jener innern Prismen übertreffen, so sind die Volumen dieser Summen $P - \alpha$ und $p - \beta$. Da nun jede zu den Grundflächen der Pyramiden parallel gelegte Ebene auf denselben gleich große Schnitte gibt, weil sich solche wie die Grundflächen verhalten (§. 123), so müssen die correspondirenden innern Prismen je zwei und zwei einander gleich sein. Hieraus folgt: $P - \alpha = p - \beta$ und $P = p$.

Der nämliche Satz gilt auch für zwei aus unsern Pyramiden durch zwei parallele Ebenen entstandenen abgestumpften Pyramiden.

§. 156. **Eine jede dreiseitige Pyramide DABC (Fig. 181) ist der dritte Theil eines Prisma's von einerlei Grundfläche und Höhe.** Ueber der Basis BAC sei das dreiseitige Prisma AE gebildet. Wenn man von diesem Prisma die dreiseitige Pyramide DABC absondert, so bleibt die vierseitige Pyramide DACEF. Legt man durch die drei Punkte C, D und F eine Ebene, so wird die vierseitige Pyramide in zwei dreiseitige zerlegt. Die eine FDEC ist der vorgelegten gleich, da sie dieselbe Höhe hat und die Basis FDE $=$ ABC; die andere DACF ist aus demselben Grunde der Pyramide DFCE gleich, weil das Dreieck AFC $=$ EFC. Unsere drei dreiseitigen Pyramiden sind also einander gleich, mithin ist jede der dritte Theil des Prisma's.

Das Volumen einer jeden Pyramide hat daher zum Maß den dritten Theil des Produktes ihrer Grundfläche in ihre Höhe; denn die Pyramide läßt sich in dreiseitige Pyramiden zerlegen.

Da der Kegel die Grenze der umschriebenen Pyramiden ist, so

hat das Volumen des Kegels zum Maß den dritten Theil des Produktes aus der Grundfläche in die Höhe. Der Kegel ist folglich der dritte Theil des Cylinders von derselben Grundfläche und Höhe.

Das Volumen irgend eines Polyeders wird gefunden, indem man es in Pyramiden zerlegt.

Symmetrische Polyeder haben gleich großes Volumen, denn man kann sie offenbar in die nämliche Anzahl symmetrischer dreiseitiger Pyramiden zerlegen, welche beziehungsweise gleiche Höhen und Grundflächen haben.

Anmerkung. Es ist häufig der Fall, daß Polyeder sich nicht leicht in Pyramiden zerlegen lassen. Wie die Bestimmung der Volumen solcher Polyeder und überhaupt eines jeden Körpers, wie er auch gestaltet sein mag, am bequemsten geschieht, lehrt die Physik.

§. 157. Das Volumen eines abgestumpften dreiseitigen Prisma's ABEF (Fig. 182) hat zum Maß das Produkt aus der Grundfläche in den dritten Theil der Summe der von den drei Scheiteln F, D, E der obern Fläche auf die Grundfläche gefällten Perpendikel. Legt man nämlich in diesem abgestumpften Körper ABEF dieselben Schnitte wie vorhin, so gibt die Ebene ADC zuvörderst die dreiseitige Pyramide DABC. Die Ebene DCF zerlegt die vierseitige Pyramide DACEF in zwei dreiseitige DFCA, DFCE. Nun kann man ohne Aenderung der Grundflächen AFC, EFC, die Scheitel der zwei letztgenannten Pyramiden nach B verlegen, weil DB der Ebene ACEF parallel ist (§. 114). Man erhält dadurch die dreiseitigen Pyramiden BCAF, BCEF. Die letzte ist der Pyramide BCEA gleich, weil die Dreiecke CEF und CEA gleich groß sind. Das abgestumpfte Prisma ist daher so groß wie die dreiseitigen Pyramiden DABC, FABC, EABC zusammengenommen, welche die gemeinschaftliche Grundfläche ABC und die Spitzen in den Ecken der obern Fläche FDE haben. — Mit Hülfe dieses Satzes läßt sich auch das Volumen eines abgestumpften Prisma's mit beliebiger Grundfläche finden.

§. 158. Wenn irgend eine Pyramide parallel mit der Basis geschnitten wird, so ist die abgestumpfte Pyra-

mide der Summe dreier Pyramiden gleich, welche die beiden parallelen Grundflächen und die mittlere geometrische Proportionale zwischen diesen zu Grundflächen und mit der abgestumpften Pyramide einerlei Höhe haben. Denkt man sich eine vielseitige und eine dreiseitige Pyramide von derselben Höhe und gleich großen Grundflächen auf einerlei Ebene gestellt, so sind diese Pyramiden dem Volumen nach gleich. Eine zu den Grundflächen parallel geführte Ebene schneidet die dreiseitige und vielseitige Pyramide bezüglich in einem Dreiecke und einem Polygon, welche Figuren einen gleichen Flächeninhalt haben, weil sie den Grundflächen proportional sind (§. 123). Die abgeschnittenen dreiseitigen und vierseitigen Pyramiden sind daher gleich groß, mithin auch die abgestumpften Körper. Es bleibt also nur übrig, den Satz für die abgestumpfte dreiseitige Pyramide ABFE (Fig. 183) zu beweisen.

Die Ebene ADC gibt die beiden Körper DBAC und DACEF; ferner bildet die Ebene DFC die dreiseitigen Pyramiden DFEC und DFAC. Zieht man nun DG parallel zu AF, so kann man den Scheitel der letztern Pyramide nach G verlegen, wodurch sie in die gleichgeltende FAGC verwandelt wird. Diese drei dreiseitigen Pyramiden, deren Grundflächen ABC, DFE, AGC sind, besitzen mit der abgestumpften Pyramide einerlei Höhe. Dies vorausgesetzt, haben wir (§. 101) $\frac{ABC}{AGC} = \frac{AB}{AG}$, $\frac{AGC}{FDE} = \frac{AC}{FE}$. Die zweiten Glieder dieser Gleichungen sind wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke FDE, ABC einander gleich; folglich $\frac{ABC}{AGC} = \frac{AGC}{FDE}$; woraus die Richtigkeit der Behauptung erhellet.

Sind A und B die Grundflächen der abgestumpften Pyramiden, H ihre Höhe, so wird ihr Volumen durch $\frac{1}{3}H\,(A + B + \sqrt{AB})$ ausgedrückt. Man sieht leicht ein, daß dieser Satz für den abgestumpften Kegel ebenfalls statt findet. Bezeichnet man durch R und r die Radien der Grundflächen, so ist $A = \pi R^2$ und $B = \pi r^2$; mithin das Volumen des abgestumpften Kegels $\frac{\pi}{3}H\,(R^2 + r^2 + Rr)$.

§. 159. Das Volumen eines durch die Bewegung eines beliebigen Dreiecks ABC (Fig. 184, 185, 186, 187) um

eine in seiner Ebene durch einen seiner Scheitel gezogenen Gerade CI erzeugten Körpers hat zum Maß den dritten Theil des Produkts aus der von diesem Scheitel auf die Basis AB gefällten Senkrechte CD = p in die von dieser Basis AB beschriebenen Oberfläche.

Erster Fall. Das Dreieck CAB dreht sich um eine seiner Seiten CB (Fig. 186). Man hat Volumen CAB = Kegel CAP + Kegel BAP = $\frac{1}{3}$ Kreis AP × CB = $\frac{1}{3}\pi \cdot AP^2 \times CB$. Nun ist AP × CB = 2 mal Fläche ABC = AB × CD; folglich Volumen CAB = $\frac{1}{3}\pi \cdot p \cdot AP \times AB$. Ferner ist die Oberfläche des durch AB erzeugten Kegels = $\frac{1}{2}$ Umkreis AP × AB = $\pi \cdot AP \times AB$; also Volumen ACB = $\frac{1}{3} \cdot p \times$ Oberfläche AB. Dieser Beweis gilt für die drei Fälle, wo der Winkel A ein rechter, spitzer oder stumpfer ist.

Zweiter Fall. Das Dreieck CAB dreht sich um ein ausserhalb desselben liegenden Geraden CI (Fig. 184). Man hat Volumen CAB = Volumen CAI — Volumen BCI = $\frac{1}{3}$p (Oberfläche AI — Oberfläche BI) = $\frac{1}{3}$p · Oberfläche AB.

Dritter Fall. Die Basis AB läuft zur Umdrehungsachse CI parallel (Fig. 185). Man hat Volumen CAB = Cylinder ABEF + Kegel CAE — Kegel CBF = Kreis CD (AB + $\frac{1}{3}$CE — $\frac{1}{3}$CF) = $\frac{1}{3}\pi \cdot CD^2 (3EF + CE - CF) = \frac{1}{3}\pi \cdot CD^2 \cdot 2 \cdot EF$. Die durch AB erzeugte Oberfläche ist aber die eines Cylinders, mithin Umkreis CD × EF = $2\pi \cdot CD \times EF$; folglich Volumen CAB = $\frac{1}{3} \cdot$ CD × Oberfläche AB.

Mit Hülfe dieses Satzes sind wir im Stande, das Volumen der Kugel, des Kugelausschnitts und des Kugelabschnitts zu finden. Denn schreibt man um den Bogen ADP (Fig. 169) ein Polygonstück mit gleichen Seiten, läßt dann die Figur sich um den Durchmesser AO drehen; so erzeugt die vollständige Umdrehung aller Dreiecke CAB, CBD, CDI... einen körperlichen Raum, der gleich $\frac{1}{3}$p (Oberfläche AB + Oberfläche BD + ...). Das Volumen des von dem umschriebenen Polygon erzeugten Körpers hat also zum Maß die durch die Seiten des Polygons beschriebene Oberfläche multiplicirt mit dem dritten Theil des Radius.

Hieraus ergibt sich:

1) Es sei das Polygon dem Halbkreis ADB (Fig. 167) umschrieben, dessen Radius R ist. Bezeichnen wir durch α den Unterschied zwischen der Oberfläche des von dem umschriebenen Polygon

erzeugten Körpers und der Oberfläche P der Kugel, und durch β den Unterschied zwischen dem Volumen jenes Körpers und dem der Kugel V, so erhalten wir die Gleichung $V + \beta = \frac{1}{3}R(P + \alpha)$, woraus $V = \frac{1}{3}R \times P$.

Das Volumen ist also gleich ihrer Oberfläche multiplicirt mit dem dritten Theil des Radius, oder gleich ihrem größten Kreis multiplicirt mit vier Dritteln des Radius. Da der größte Kreis der Kugel durch πR^2 oder $\frac{1}{4}\pi D^2$ ausgedrückt wird, wenn man ihren Durchmesser mit D bezeichnet, so ist das Volumen der Kugel $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{6}\pi D^3 = 0{,}5236R^3$.

2) Der Radius R der Kugel, welche V zum Volumen hat, wird durch folgende Gleichung bestimmt: $R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = \sqrt[3]{KV}$, wo $\log. K = 0{,}3779114 - 1$.

3) Was den Kugelausschnitt DAC betrifft, so beweist man auf dieselbe Art, daß sein Volumen gleich ist der Oberfläche der dazu gehörigen Calotte multiplicirt mit dem dritten Theil des Radius, oder durch $\frac{2}{3}\pi R^2 h$ ausgedrückt wird, wenn h die Höhe AI bezeichnet.

4) Das Volumen des Kugelabschnitts ADIG wird erhalten, wenn man das Volumen des von dem Dreiecke DIC beschriebenen Kegels von dem Volumen des Kugelausschnitts abzieht. Das Volumen des Kegels ist $= \frac{1}{3}CI \times$ Kreis $DI = \frac{1}{3}CI \times \pi \cdot DI^2$. Nun ist $CI = R - h$, ferner $DI^2 = DC^2 - CI^2 = 2Rh - h^2$. Das Volumen des Kugelabschnitts, wird daher durch $\frac{1}{3}\pi h^2 (3R - h)$ ausgedrückt.

Anmerkung. Man kann diesem Ausdruck eine andere Form geben. Setzt man nämlich $DI = b$, so erhält man $R = \frac{b^2 + h^2}{2h}$. Der Ausdruck für das Volumen des Kugelabschnitts verwandelt sich hiernach in folgenden: $\frac{1}{3}\pi h^2 \left(\frac{3b^2 + 3h^2}{2h} - h\right) = \frac{1}{2}\pi h (3b^2 + h^2)$.

5) Das Volumen des Kugeltheils, welche zwischen der Zone DF und den Parallelkreisen DI und FK liegt, erhält man, wenn man von dem Kugelabschnitt DAG den Kugelabschnitt FAN abzieht.

6) Stellen wir das Volumen der Kugel, deren Halbmesser R ist, durch V vor, das Volumen des der Kugel umschriebenen Cylinders DGFE durch C, durch K endlich das Volumen des dieser Kugel umschriebenen Kegels HIK (Fig. 170), so haben wir:

1) $V = \frac{4}{3}\pi R^3$;

2) $C = \pi R^2 \times 2R = 2\pi R^3$;

3) $K = 3\pi R^2 \times \frac{1}{3} HB = 3\pi R^3$, weil $HB^2 = HI^2 = IB^2 = \frac{3}{4} HI^2$, mithin $HB = 3R$.

Vergleichen wir diese Ausdrücke mit einander, so finden wir, daß sie sich wie 4:6:9 verhalten; es sind dies also die Verhältnißzahlen der Volumen dieser drei Körper. Das Volumen des Cylinders ist folglich die mittlere geometrische Proportionale zwischen den beiden andern, und die Kugel $\frac{2}{3}$ des umschriebenen Cylinders.

Anmerkung. Stellt C′ das Volumen des in der Kugel eingeschriebenen gleichseitigen Cylinders, K′ das Volumen des in der Kugel eingeschriebenen gleichseitigen Kegels vor, so erhalten wir:

$$C' = \frac{\pi R^3 \cdot 2\sqrt{2}}{4};$$

$$K' = \frac{\pi R^3 9}{8 \cdot 3}.$$

Hieraus folgt, daß sich die Volumen dieser drei Körper wie $32 : 12\sqrt{2} : 9$ verhalten. Das Volumen des Cylinders ist also wieder die mittlere geometrische Proportionale zwischen den beiden andern.

Vergleichung der Volumen.

§. 160. **Die Volumen zweier ähnlicher Polyeder verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer gleichnamigen Linien.**

1) Sind die vorgelegten Polyeder die ähnlichen Pyramiden SABC... und Sabc... (Fig. 151), so hat man, wenn das Volumen der erstern durch P, und das Volumen der zweiten durch p ausgedrückt wird:

$P = \frac{1}{3} \cdot ABC... \times SH$, und

$p = \frac{1}{3} \cdot abc... \times Sh$. Folglich

$P : p = ABC... \times SH : abc... \times Sh.$

Wegen Aehnlichkeit der Pyramiden ist:

$ABC... : abc... = AB^2 : ab^2 = SH^2 : Sh^2.$

Wird diese Proportion mit folgender $SH : Sh = SH : Sh$ zusammengesetzt, so erhält man: $ABC... \times SH : abc... \times Sh = SH^3 : Sh^3$; woraus $P : p = SH^3 : Sh^3$; u. s. w.

Anmerkung. Vermittelst einer ähnlichen Schlußweise wird sich leicht zeigen lassen, daß die Volumen zweier dreiseitigen Pyramiden, welche eine gleiche Ecke haben, sich verhalten wie die Produkte aus den diese Ecke bildenden Kanten.

2) Sind es irgend zwei andere ähnliche Polyeder, so denke man sich diese Körper P und p in gleich viele der Ordnung nach ähnliche Pyramiden zerlegt (§. 141). Es seien S, S'.... die Pyramiden des ersten Körpers P, und s, s'... die beziehungsweise ähnlichen Pyramiden des zweiten; ferner A, A'...., und a, a'... homologe Linien dieser Pyramiden. Man hat demnach $\frac{S}{s} = \frac{A^3}{a^3}$, $\frac{S'}{s'} = \frac{A'^3}{a'^3}$ ....

Wegen der vorausgesetzten Aehnlichkeit ist aber $\frac{A}{a} = \frac{A'}{a'} = \ldots$

Also $\frac{S}{s} = \frac{S'}{s'} = \frac{S''}{s''} = \frac{A^3}{a^3}$, woraus $\frac{S+S'+S''+\ldots}{s+s'+s''+\ldots} = \frac{P}{p} = \frac{A^3}{a^3}$ u. s. w.

§. 161. Aus dem für das Volumen der Kugel gegebenen Ausdruck ergibt sich von selbst, daß die Volumen zweier Kugeln sich verhalten wie die dritten Potenzen ihrer Halbmesser oder Durchmesser. Ferner läßt sich leicht zeigen, daß die Volumen ähnlicher gerader Cylinder und Kegel (d. h. derjenigen Körper, die durch Umdrehung ähnlicher Rechtecke und rechtwinkliger Dreiecke erzeugt sind) sich verhalten wie die dritten Potenzen ihrer gleichnamigen Abmessungen.

Anmerkung. Kegel, Kugel und Cylinder von gleicher Grundfläche und Höhe verhalten sich hinsichtlich ihrer Volumen wie 1:2:3. Bezeichnet man nämlich den Halbmesser der Kugel mit r, das Volumen derselben mit V, das Volumen des Kegels mit K und das des Cylinders mit C, so ist $V = \frac{4}{3}r^3\pi$; $K = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot 2r}{3}$; $C = \pi r^2 \cdot 2r$. Folglich $K : V : C = 2 : 4 : 6 = 1 : 2 : 3$.

Dieser Satz wird nach seinem Erfinder der Archimedische genannt.

Noten zur Elementar-Geometrie.

Note 1 zu §. 60.

Die vier merkwürdigen Punkte im Dreiecke.

1) Wir haben im §. 45 des Textes gesehen, daß die Linien, welche die drei Seiten eines Dreiecks senkrecht halbiren, sich jederzeit in einem und demselben Punkte vereinigen; es ist dieser Punkt der Mittelpunkt des um das Dreieck beschriebenen Kreises.

2) Ebenso haben wir im §. 60 des Textes gesehen, daß die Linien, welche die drei Winkel eines Dreiecks halbiren, sich jederzeit in einem und demselben Punkte schneiden; es ist dieser Punkt der Mittelpunkt des in das Dreieck eingeschriebenen Kreises.

3) Wir wollen nun zeigen, daß auch die drei Höhen eines Dreiecks jederzeit in einem und demselben Punkte zusammentreffen. Aa, Bb, Cc seien die drei Höhen des gegebenen Dreiecks ABC (Fig. 187); die durch die Ecken des Dreiecks den gegenüberliegenden Seiten parallelgezogenen Linien bilden ein Dreieck A′B′C′. Die Parallelogramme ABA′C, BCB′A, CAC′B geben:

$$AB' = BC,\ AC' = BC;$$
$$BA' = AC,\ BC' = AC;$$
$$CA' = AB,\ CB' = AB;$$

woraus $AB' = AC'$, $BA' = BC'$, $CA' = CB'$.

Da nun die drei Höhen des Dreiecks ABC bezüglich mit den drei die Seiten des Dreiecks A′B′C′ senkrecht halbirenden Linien zusammenfallen, und diese letztern Linien sich in einem und demselben Punkte vereinigen; so ist der ausgesprochene Lehrsatz hiermit erwiesen.

4) Wir werden jetzt zeigen, daß die Linien, welche aus den Winkelspitzen eines Dreiecks nach den Mitten der gegenüberstehenden Seiten gezogen werden, sich gleichfalls jederzeit in einem und demselben Punkte schneiden. ABC sei das gegebene Dreieck (Fig. 188); a, b, c die Halbirungspunkte der drei Seiten. Vereinigt man die Punkte c und b durch eine Gerade cb, so ist solche zu BC parallel. Zieht man durch den Ver-

einigungspunkt o der beiden Linien Bb und Cc, und durch den Punkt a die Linien oa, und verlängert dieselbe, bis sie die Seite bc in k trifft: so entstehen die ähnlichen Dreiecke Boa und kob, Coa und Cko. Aus diesen Dreiecken erhält man die Gleichungen $\frac{Ba}{oa} = \frac{kb}{ko}$ und $\frac{Ca}{oa} = \frac{ck}{ko}$; folglich ck = kb. Hieraus erhellet, daß die verlängerte Gerade ak durch den Scheitel A des Dreiecks gehen muß.

Man nennt den gemeinschaftlichen Punkt der die drei Seiten eines Dreiecks senkrecht halbirenden Linien, den gemeinschaftlichen Punkt der die drei Winkel eines Dreiecks halbirenden Linien, den gemeinschaftlichen Punkt der drei Höhen eines Dreiecks, den gemeinschaftlichen Punkt der aus den drei Ecken eines Dreiecks nach den Mitten der gegenüberstehenden Seiten gezogenen Linien die vier merkwürdigen Punkte des Dreiecks.

Note 2 zu §. 70.

In jedem Dreieck ABC (Fig. 189) ist die Summe der Quadrate zweier Seiten AB, AC gleich dem doppelten Quadrate der Hälfte der dritten Seite BC und dem doppelten Quadrate der geraden Verbindungslinie AD der Mitte D dieser dritten Seite mit der gegenüberliegenden Winkelspitze A. Fällt man nämlich aus der Spitze A auf die Seite BC das Perpendikel AE, so hat man:

$$AB^2 = BD^2 + AD^2 - 2BD \times DE.$$
$$AC^2 = CD^2 + AD^2 + 2CD \times DE \text{ (§. 68).}$$

Addirt man diese Gleichungen, so ergibt sich: $AB^2+AC^2=2BD^2+2AD^2$, wie zu beweisen war.

Note 3 zu §. 80.

In jedem Viereck ABCD (Fig. 190) ist die Summe der Quadrate der Seiten gleich der Summe der Quadrate der Diagonalen und dem vierfachen Quadrate der geraden Verbindungslinie der Mitte der beiden Diagonalen. Denn zieht man die Geraden Cn und nA, so hat man im Dreieck DCB:

$$DC^2 + CB^2 = 2Dn^2 + 2Cn^2.$$

Desgleichen im Dreieck DBA:

$$DA^2 + BA^2 = 2Dn^2 + 2nA^2.$$

Ferner im Dreieck CnA:

$$Cn^2 + nA^2 = 2Cm^2 + 2nm^2.$$

Addirt man das Doppelte dieser letzten Gleichung zu den beiden ersten, so kommt:

$DC^2 + CB^2 + DA^2 + BA^2 = 4Dn^2 + 4Cm^2 + 4nm^2$; oder
$DC^2+CB^2+AB^2+DA^2=DB^2+CA^2+4nm^2$, was zu beweisen war.

Note 4 zu §. 87.

Die Seiten des regelmäßigen Zehnecks, Sechsecks und Fünfecks in einerlei Kreis bilden allemal ein rechtwinkliges Dreieck.

Es sei AB die Fünfecksseite (Fig. 191), AC = CB die Zehnecksseite; m der Durchschnittspunkt der Seite AB mit der den Winkel AoC halbirenden Linie mo.

Die Dreiecke Amo und moC sind einander gleich, mithin das Dreieck AmC gleichschenklig und dem Dreiecke ACB ähnlich; woraus $AC^2 = AB \times Am$.

Es ist ferner der Winkel $oBA = \frac{1}{5}R$; desgleichen Winkel $Bom = CoB + moC = \frac{2}{5}R + \frac{1}{5}R = \frac{3}{5}R$. Hieraus folgt, daß das Dreieck Bom gleichschenklig und dem Dreiecke AoB ähnlich ist; daher $oB^2 = AB \times mB$. Addirt man zu dieser Gleichung die eben erhaltene: $AC^2 = AB \times Am$, so findet man: $oB^2 + AC^2 = AB\,(Am + mB) = AB^2$; was zu beweisen war.

Note 5 zu §. 88.

Bei jedem Vieleck von einer geraden Anzahl Seiten, das in einen Kreis eingeschrieben ist, ist die Summe des ersten, dritten, fünften u. s. w. Polygonwinkels gleich der Summe des zweiten, vierten, sechsten u. s. w.

Man hat z. B. für das Sechseck (Fig. 192):

$$\text{Winkel } A = \frac{c + d + e + f}{2};$$

$$\text{Winkel } C = \frac{b + a + f + e}{2};$$

$$\text{Winkel } E = \frac{a + b + c + d}{2}; \text{ mithin}$$

$$A + C + E = \frac{2(a+b+c+d+e+f)}{2} = 4R.$$

Daher $B + D + F = 8R - 4R = 4R$.

Folglich $A + C + E = B + D + F$.

Bei jedem Vieleck von einer geraden Anzahl Seiten, das um einen Kreis geschrieben ist, ist die Summe der ersten, dritten, fünften, u. s. w. Seite gleich der Summe der zweiten, vierten, sechsten u. s. w. Seite.

Man hat z. B. für das Sechseck (Fig. 193):

$$ag = am$$
$$gb = bh$$
$$ci = ch$$
$$id = dk$$
$$el = ek$$
$$lf = fn;$$

woraus, wenn man addirt:

$$ab + cd + ef = bc + cd + fa.$$

Die umgekehrten Sätze haben nicht nothwendig statt; nur beim Viereck ist solches der Fall.

Note 6 zu §. 95.

Die Berechnung der Radien R läßt sich leicht mit Hülfe der Logarithmen bewerkstelligen; durch folgendes Verfahren wird sie überdies noch vereinfacht. Es sei $R = r' + d$, wo d die Differenz der zwei Radien, zwischen denen das geometrische Mittel gesucht wird, darstellt. Man hat $R' = \sqrt{(r'^2 + rd)}$; woraus durch Wurzelausziehung $R' = r' + \frac{1}{2}d - \frac{d^2}{8r'} \ldots\ldots = r'\sqrt{\left(1 + \frac{d}{r'}\right)}$.

Diese Formeln gestatten Vereinfachungen. Man bemerkt nämlich, wenn d höchstens die halbe Anzahl der Ziffern von r' hat, und man solche Werthe als ganzzahlig betrachtet, daß $d^2 < 8r'$ ist, weil d^2 im höchsten Falle nur die nämliche Anzahl von Ziffern als r' besitzt. Um folglich einen wenigstens bis auf $\frac{1}{2}$ genau genäherten Werth von R' zu erhalten, kann man sich mit $R' = r' + \frac{1}{2}d$, d. i. mit dem arithmetischen Mittel zwischen R und r' begnügen. Hat man demnach zwei successive Werthe von R und r' gefunden, die in der Hälfte ihrer Ziffern zur Linken übereinstimmen, so hat man von da an nur die arithmetischen Mittel zu suchen. Es ereignet sich dies bei den letzten im Text angegebenen Zahlenresultaten und bei allen folgenden. Man hat also nichts weiter nöthig, als jene arithmetischen Mittel nach und nach zu berechnen. Denn stellt m eine dieser Zahlen, und $m + \delta$ die nächstfolgende dar, so ist das arithmetische Mittel derselben $= m + \frac{1}{2}\delta = m + \frac{2}{3}\delta - \frac{1}{6}\delta$. Fährt man solchergestalt fort, die arithmetischen Mittel zu nehmen, so findet man: $m + \frac{2}{3}\delta + \frac{1}{12}\delta$, $m + \frac{2}{3}\delta - \frac{1}{24}\delta$, $m + \frac{2}{3}\delta + \frac{1}{48}\delta$ u. s. w., Zahlen, welche offenbar $m + \frac{2}{3}\delta$ zur Grenze haben; es ist dies der letzte Werth der Größen R und r, wenn sie einander gleich geworden sind.

Note 7 zu §. 95.

Von den verschiedenen graphischen Methoden, die Länge des Umkreises für einen gegebenen Halbmesser annähernd zu finden, verdient das Folgende wegen seiner Genauigkeit bemerkt zu werden: Durch einen beliebigen Punkt A einer unbegrenzten Geraden (Fig. 194) errichte auf solche die Senkrechte Ao gleich dem gegebenen Radius; trage dann dreimal diesen Radius von A nach D auf; ziehe die Gerade oD und durch den ersten Theilungspunkt B auf AD die Senkrechte BE bis zu ihrem

Durchschnittspunkt E mit der Linie oD; auf der Verlängerung von AD mache DF = ED, und jenseits der Punkte A und F die Linien AH und FG jede dem Radius Ao gleich; nehme endlich FK = $\frac{3}{8}$ × Ao und AL = $\frac{4}{7}$ × Ao. Dieser Construction zufolge wird KL bis zur siebenten Decimalstelle genau die Länge des Kreisumfanges für den Halbmesser Ao sein. Setzen wir nämlich Ao = r, so kommt LK = LA + AD + DF + FK = $\frac{4}{7}$r + 3r + DE + $\frac{3}{8}$r = $\frac{167}{40}$r + $\frac{2}{3}$ · OD = $\frac{167}{40}$r + $\frac{2}{3}$ $\sqrt{}$(Ao² + AD²) = $\frac{167}{40}$r + $\frac{2}{3}$r $\sqrt{}$10 = r·6,2831851063. Nimmt man Ao = r = $\frac{1}{2}$, so kommt LK = 3,1415925531, welches Resultat von dem richtigen Werth π = 3,1415926536.... erst um eine Einheit in der siebenten Decimalstelle verschieden ist.

Note 8 zu §. 95.

Statt den Werth des Halbmessers für einen Umfang von bestimmter Länge zu suchen, kann man den Werth eines Kreisumfanges, dessen Halbmesser zum voraus bestimmt ist, finden. Zu diesem Zwecke lösen wir vorerst folgende zwei Aufgaben:

I. Der Halbmesser eines Kreises OA = r, die Seite AB = a eines eingeschriebenen regelmäßigen Vielecks ist gegeben (Fig. 122); man soll die Seiten AC = x des eingeschriebenen regelmäßigen Vielecks von doppelt so viel Seiten berechnen. Die auf AB errichtete Senkrechte OC gibt AC² = CI × 2 · CO. Bezeichnet z den Radius OI des zum gegebenen Polygon eingeschriebenen Kreises, so hat man CI = r − z, und OI² = AO² − AI²; folglich x² = 2r(r − z) und z² = r² − $\frac{1}{4}$a². Durch Substitutionen wird gefunden x = $\sqrt{}$[2r(r − $\sqrt{}$r² − $\frac{1}{4}$a²)]. Setzt man z. B. a = r, so erhält man x = r $\sqrt{}$(2 − $\sqrt{}$3) für die Seite des regelmäßig eingeschriebenen Zwölfecks, ꝛc.

II. Der Halbmesser eines Kreises AO = r, die Seite AB = a eines eingeschriebenen regelmäßigen Polygons sind gegeben; man soll die Seite EF = y des ähnlichen, umschriebenen Polygons berechnen. Die ähnlichen Dreiecke AOI und EOC geben $\frac{OI}{OC} = \frac{AI}{EC}$ oder $\frac{z}{r} = \frac{a}{y}$,

woraus $y = \frac{ar}{z} = \frac{ar}{\sqrt{\left(r^2 - \frac{a^2}{4}\right)}}$, weil $z^2 = r^2 - \frac{1}{4}a^2$.

Setzt man a = r$\sqrt{}$2, so kömmt y = 2r für die Seite des umschriebenen Quadrats. a = r$\sqrt{}$3 gibt y = 2r$\sqrt{}$3 für die Seite des umschriebenen gleichseitigen Dreiecks, ꝛc.

Mittelst dieser Formeln ist es nun leicht, das genäherte Verhältniß des Umkreises zum Durchmesser, oder den halben Umkreis π, dessen Radius = 1 zu finden. Setzen wir r = 1, so werden wir erhalten:

$x = \sqrt{[2(1-\sqrt{1-\frac{1}{4}a^2})]}$, und $y = \frac{a}{\sqrt{(1-\frac{a^2}{4})}}$. Nehmen wir $a = 1$, so kommt $x = 0{,}517638$ für die Seite des eingeschriebenen regelmäßigen Zwölfecks. Setzen wir nun $a = 0{,}517638$, so kommt $x = 0{,}26105238$ für die Seite des regelmäßigen Vielecks von 24 Seiten, u. s. w. Vier solcher Operationen z. B. geben $x = 0{,}0654381\overline{66}$ für die Seite des regelmäßigen eingeschriebenen Polygons von 96 Seiten. Substituirt man diesen Werth a in der Formel $y = \frac{a}{\sqrt{(1-\frac{a^2}{4})}}$ so erhält man $y =$ 0,0654732 für die Seite des umschriebenen ähnlichen Polygons.

Werden diese beiden Werthe von x und y mit 48 multiplicirt, so erhält man für die halben Umfänge dieser Polygone beziehungsweise 3,1410... und 3,1427... Da der halbe Umkreis zwischen diesen Umfängen liegt, so müssen die Ziffern, welche beiden gemein sind, nothwendigerweise ihm angehören; seine Länge π mithin ist gleich 3,14... Da der Umkreis den Umfängen der regelmäßigen Polygone desto näher kommt, je größer die Seitenzahl ist; so hat man nur nöthig, für einen höhern Grad von Annäherung, die Umfänge der Polygone von einer größern Seitenzahl zu berechnen. Man erhält nach den obigen Formeln, die in folgender Tabelle angegebene Resultate:

Seitenzahl.	Halbe Umfänge der innern Polygone.	Halbe Umfänge der äussern Polygone.
96	3,1410319	3,1427146 .....
192	3,1414524	3,1418730 .....
384	3,1415576	3,1416630 .....
768	3,1415839	3,1416101 .....
1536	3,1415904	3,1415970 .....
3072	3,1415921	3,1415937 .....
6144	3,1415925	3,1415929 .....
12288	3,1415926	3,1415927 .....

Hieraus schließt man, daß bis zur sechsten Decimalstelle genau $\pi = 3{,}141592$ ist.

Das Verfahren, zum Werthe der Seiten der eingeschriebenen Polygone zu gelangen, wird mit Hülfe des vorstehenden Lehrsatzes bedeutend abgekürzt.

Es sei der Bogen HB = ½ Bogen BG (Fig. 195); zieht man von dem Endpunkte A des Durchmessers AB die Sehne AH und AG, so hat man: $AH^2 = AO(AB + AG)$. Um dies zu beweisen, ziehen wir die Sehnen BH, BG und GH, fällen HF senkrecht auf AB und legen

in H die Tangente HE an. Die Dreiecke BFH und GEH sind einander gleich, folglich FB = GE, HF = EH. Ferner sind die Dreiecke AFH und AEH einander gleich, daher AE = AF. Wir haben nun AH^2 = AB · AF = AO · 2AF = AO(AF + AE) = AO(AB — FB + AG + GE) = AO(AB + AG), was zu beweisen war.

Nimmt man den Halbmesser für die Einheit, so erhält man: AH = $\sqrt{}$(2+AG). Theilt man nun weiter den Bogen BH in I, den Bogen BI in K in zwei gleiche Theile, und dies so fort, so gelangt man zur folgenden Reihe von Werthen: AH = $\sqrt{}$(2+AG), AI = $\sqrt{}$(2+AH), AK = $\sqrt{}$(2+AI) u. s. w. Ist der Bogen GB der sechste Theil des Umkreises, so findet man: AG = $\sqrt{}$3 = 1,732050807569; AH = $\sqrt{}$(2+AG) = 1,931851652578. AI = $\sqrt{}$(2+AH) = 1,982889722747 u. s. w.

Mittelst dieser berechneten Sehnen erhält man unmittelbar die Werthe der Sehnen zu denjenigen Bogen, welche zu den Bogen der ersten Sehnen bezüglich hinzugesetzt werden müssen, um den halben Umkreis zu ergänzen. Man hat nämlich BH = $\sqrt{}$(AB^2 — AH^2) = $\sqrt{}$(2—AG); BI = $\sqrt{}$(2—AH); BK = $\sqrt{}$(2—AI) ꝛc. ꝛc.

Gehen wir von BG = 1 aus, so finden wir:

		Die halben Umfänge der correspondirenden eingeschriebenen Polygone sind:	
BH	= 0,5176380902	6	BH
BI	= 0,2610523844	12	BI
BK	= 0,1308062584	24	BK
BL	= 0,0654381655	48	BL
BM	= 0,0327234632	96	BM
BN	= 0,0163622792	192	BN
BO	= 0,0081812080	384	BO
BP	= 0,0040906125	768	BP
BQ	= 0,0020453073	1536	BQ
BR	= 0,0010226538	3072	BR
BS	= 0,0005113269	6144	BS

Wir haben 6144 BS = 3,14159...., wie vorhin.

Note 9 zu §. 95.

Der große Mathematiker Legendre bestimmt das Verhältniß π der Peripherie des Kreises zum Durchmesser, durch die Auflösung folgender Aufgabe. Die Flächeninhalte von zwei ähnlichen regelmäßigen Vielecken, deren eines dem Kreise umschrieben, das andere demselben Kreise eingeschrieben ist, seien gegeben; man soll die Flächenräume des diesem Kreise

eingeschriebenen und umschriebenen regelmäßigen Vielecks von der doppelten Seitenanzahl finden.

Es sei AB (Fig. 196) die Seite eines eingeschriebenen Vielecks von n Seiten, CD die Seite des ähnlichen umschriebenen Vielecks; E sei der Flächeninhalt des erstern, U der des letztern. Zieht man oF senkrecht auf AB, so ist AG die Seite des regelmäßigen eingeschriebenen Vielecks von 2n Seiten. Legt man durch die Punkte A, G und B Berührungslinien, so ist HI die Seite des umschriebenen regelmäßigen Vielecks von 2n Seiten. Der Flächeninhalt des erstern sei $= E'$, der des zweiten gleich U'. Wir haben also E' und U' aus E und U zu berechnen.

Es ist offenbar:

$$E = n \cdot \text{Tr. } AoB = 2n \cdot \text{Tr. } AoF; \quad (1)$$
$$U = n \cdot \text{Tr. } CoD = 2n \cdot \text{Tr. } CoG; \quad (2)$$
$$E' = 2n \cdot \text{Tr. } AGo; \quad (3)$$
$$U' = 2n \cdot \text{Tr. } Hlo = 4n \cdot \text{Tr. } HGo; \quad (4)$$

Aus (1) und (3) folgt: $\frac{E}{E'} = \frac{\text{Tr. } AoF}{\text{Tr. } AoG} = \frac{Fo}{Go}$. (5)

Aus (2) und (3) ergibt sich: $\frac{E'}{U} = \frac{\text{Tr. } AoG}{\text{Tr. } CoG} = \frac{Ao}{Co} = \frac{Fo}{Go}$. (6)

Aus (5) und (6) entsteht: $\frac{E}{E'} = \frac{E'}{U}$, oder $E' = \sqrt{EU}$. (I)

Aus (2) und (4) folgt: $\frac{U}{U'} = \frac{\text{Tr. } CoG}{2\,\text{Tr. } HGo} = \frac{1}{4} \cdot \frac{CG}{HG}$ (7)

Aus (5) ergibt sich: $\frac{E'}{E} = \frac{Ao}{Fo} = \frac{Co}{Go} = \frac{CH}{HG}$;

folglich auch: $\frac{E' + E}{E} = \frac{CH + HG}{HG} = \frac{CG}{HG}$. (8)

Aus der Zusammenstellung der Gleichungen (7) und (8) ergibt sich:

$$\frac{2 \cdot U}{U'} = \frac{E + E'}{E}, \text{ oder}$$

$$U' = \frac{2 \cdot EU}{E + E'} \text{ (II).}$$

Die Formeln (I) und (II) enthalten demnach die verlangte Auflösung. — Für $n = 4$ und den Halbmesser $= n$ erhält man $E = 2$, $U = 4$. Geht man von diesen Polygonen aus, so findet man mittelst den Formeln (I) und (II) nach und nach folgende Resultate:

Seitenzahl.	Flächenräume der innern Polygone.	Flächenräume der äussern Polygone.
4	2,0000000	4,0000000
8	2,8284271	3,3137085
16	3,0614674	3,1825979
32	3,1214451	3,1517249
64	3,1365485	3,1441184
128	3,1403311	3,1422236
256	3,1412772	3,1417504
512	3,1415138	3,1416321
1024	3,1415729	3,1416025
2048	3,1415877	3,1415951
4096	3,1415914	3,1415933
8192	3,1415923	3,1415928
16384	3,1415925	3,1415927
32768	3,1415926	3,1415926

Da nun der Flächeninhalt des Kreises immer zwischen den Flächeninhalten der eingeschriebenen und umschriebenen Polygone liegt, so hat man bis zur siebenten Decimalstelle genau C = 3,1415926. Nun ist aber $C = r^2 \cdot \pi = 1 \cdot \pi$, folglich bis zur siebenten Decimalstelle genau $\pi = 3{,}1415926$.

Note 10 zu §. 101.

Wenn man aus einem beliebigen Punkte innerhalb eines Dreiecks ABC Senkrechte auf die drei Seiten fällt, und jede dieser Senkrechten durch die Höhe auf die nämliche Seite dividirt, so ist die Summe der drei auf solche Art gefundenen Quotienten = 1. Die Seiten des Dreiecks seien a, b, c, wo a dem Winkel A, b dem Winkel B und c dem Winkel C gegenüber liegt. Wir wollen die aus A, B, C errichteten Höhen bezüglich durch h, h′, h″, und die aus dem beliebigen Punkte M innerhalb des Dreiecks auf a, b, c gefällten Perpendikel durch p, p′, p″ bezeichnen. Wenn wir den Punkt M mit den Scheiteln des Dreiecks durch gerade Linien verbinden, so erhalten wir Dreieck $ABC = \frac{1}{2}(ap + bp' + cp'')$.

Wir haben aber auch Dr. $ABC = \frac{ah}{2} = \frac{bh'}{2} = \frac{ch''}{2}$. Hieraus ergibt sich durch Division: $1 = \frac{p}{h} + \frac{bp'}{bh'} + \frac{cp''}{ch''}$, oder $1 = \frac{p}{h} + \frac{p'}{h'} + \frac{p''}{h''}$; was zu beweisen war.

Note 11 zu §. 105.

Man würde zu demselben Resultate gekommen sein, wenn man bei einer ähnlichen Schlußart die Glieder α und β, welche am Ende doch verschwinden, vernachläßigt hätte. Es findet solches in der Methode des Unendlichkleinen statt, wo man den Umkreis als ein regelmäßiges Polygon von unendlich vielen Seiten betrachtet. In diesem Falle ist der Flächeninhalt C eines Polygons $= \frac{pr}{2}$, wo p den Umfang desselben darstellt. Dies Verfahren könnte daher als vollkommen genau angesehen werden, insofern man sich von vornherein versicherte, daß jene vernachläßigte Glieder unendlich klein wären.

Man sehe hierüber Cornot's Betrachtungen über die Theorie der Infinitisimalrechnung, aus dem Französischen von K. Hauff.

Note 11 zu §. 105.

Der Satz, daß die Kreisfläche C so groß als der Inhalt eines Dreiecks ist, dessen Grundlinie dem Umkreise p, und dessen Höhe dem Halbmesser r gleich ist, wird von Legendre auf folgende Art bewiesen:

Er zeigt nämlich, daß das Maß der Kreisfläche weder größer noch kleiner als $\frac{1}{2}$pr sein kann. In der That hätte man $C < \frac{pr}{2}$, so würde $\frac{pr}{2}$ das Maß eines Kreises C′ sein, welcher größer als der vorgelegte C wäre. Denkt man sich nun die Kreise C und C′ concentrisch, und um den kleinern C ein regelmäßiges Polygon beschrieben, dessen Ecken die Peripherie des größern C′ nicht treffen; so würde der Flächeninhalt f dieses Polygons gemessen durch $\frac{ur}{2}$, wo u den Umfang desselben bezeichnet.

Aus den beiden Gleichungen $C' = \frac{pr}{2}$ und $f = \frac{ur}{2}$, folgt nun $\frac{C'}{f} = \frac{p}{u}$, was eine Ungereimtheit darstellt, indem $C' > f$ und $p < u$ ist. Aus der Annahme, $C > \frac{pr}{2}$ würde man folgern, daß $\frac{pr}{2}$ das Maß eines Kreises C″ sein könne, welcher kleiner als der vorgelegte C wäre. Denkt man sich die beiden Kreise C″ und C concentrisch, und um den kleinern C″ ein regelmäßiges Polygon umschrieben, dessen Ecken die Peripherie von C nicht treffen, so wird das Maß des Flächeninhalts f′ dieses Polygons $= \frac{u'a'}{2}$ sein, wo u′ den Umfang und a′ das Apothem

desselben darstellt. Aus den beiden Gleichungen $C'' = \frac{pr}{2}$ und $f' = \frac{u'a'}{2}$ ergibt sich $\frac{C''}{f'} = \frac{pr}{u'a'}$; was ebenfalls eine Ungereimtheit ausspricht, da $C'' < f'$, $p > u'$ und $r > a'$ ist.

Von den drei nur möglichen Fällen $C = \frac{pr}{2}$, $C < \frac{pr}{2}$, $C > \frac{pr}{2}$ führen die beiden letztern auf Widersprüche; es muß daher $C = \frac{pr}{2}$ sein.

Note 12 zu §. 107.

Wenn man auf dem Durchmesser AB (2r) (Fig. 197) eines Kreises zwei beliebige Punkte C und D annimmt, über den Abschnitten AC und AD als Durchmesser Halbkreise nach oben, und über den Segmenten CB und DB Halbkreise nach unten beschreibt, so verhält sich der Flächeninhalt (f) der krummlinigen Figur AGCHBKDIA (Pelecoides genannt) zu der gegebenen Kreisfläche C wie CD zu AB; ferner ist der Umfang dieser krummlinigen Figur gleich der Peripherie des gegebenen Kreises.

1) Man hat $\frac{\text{Fl. AID}}{\text{Fl. AEB}} = \frac{AD^2}{4r^2}$, und

$$\frac{\text{Fl. AGC}}{\text{Fl. AEB}} = \frac{AC^2}{4r^2};$$

Daher Fläche $AGCDIA = \frac{AD^2 - AC^2}{4r^2} \cdot \text{Fl. AEB}.$

Ebenso ist Fläche $BHCDKB = \frac{BC^2 - DB^2}{4r^2} \cdot \text{Fl. AFB}.$

Durch Addition kommt:

$$f = \frac{AD^2 - AC^2 + BC^2 - DB^2}{4r^2} \cdot \text{Fl. AEB, oder}$$

$$f = \frac{(AC + CD)^2 - AC^2 + BC^2 - (BC - CD)^2}{4r^2} \cdot \text{Fl. AEB}.$$

Hieraus folgt $\frac{f}{C} = \frac{CD}{2r}$.

2) Man hat ferner $U = \frac{\pi}{2}(AC + BC + BD + AD)$, oder

$$U = \frac{2 \cdot AB \cdot \pi}{2} = 2r\pi$$

gleich der Peripherie des gegebenen Kreises.

Note 13 zu §. 117.

Wenn man von einem ausserhalb eines Flächenwinkels NABM (Fig. 198) angenommenen Punkt C auf die Ebenen desselben die Perpendikel CQ und CP fällt, so ist der Winkel QCP dieser Perpendikel gleich dem Maß des gedachten Flächenwinkels. Denn die Ebene QCP ist auf jeder der beiden Ebenen BN und AM senkrecht, mithin auch auf ihrer Durchschnittslinie AB. Letztere steht daher auf den Durchschnitten DQ und DP der Ebenen BN und AM mit der Ebene PCQ senkrecht, d. h. der Winkel EDP ist das Maß des Flächenwinkels NABM. Die Betrachtung der in einerlei Ebene liegenden Dreiecke CEQ und DEP gibt Winkel ECQ = EDP.

Errichtet man dagegen von einem innerhalb des Flächenwinkels genommenen Punkt C (Fig. 199) auf seine Flächen die Senkrechten CQ und CP, so ist der Winkel QCP dieser Perpendikel das Supplement unsers Flächenwinkels. In dem Viereck QDCP, wo die Winkel Q und P rechte sind, ist nämlich der Winkel QDP das Supplement von QCP.

Note 14 zu §. 118.

Der Winkel ACP, welchen eine schiefe Linie AC (Fig. 200) mit ihrer Projection in einer Ebene MN bildet, ist kleiner als jeder andere Winkel ACQ, den die Linie AC mit jeder in der Ebene durch ihren Fußpunkt gezogenen Geraden CQ macht. Man schneide CQ=PC ab und verbinde Q mit A und P. In den Dreiecken APC und AQC sind zwei Seiten gegenseitig gleich, die dritte Seite AQ in dem einen Dreieck ist aber größer als die dritte AP in dem andern; woraus folgt, daß der Winkel ACQ größer als der Winkel ACP ist.

Da der Winkel ACP ein Minimum ist, so muß sein Supplement ein Maximum sein.

Note 15 zu §. 126.

Wenn man aus einem Punkt s innerhalb einer dreikantigen Ecke SABC (Fig. 201) auf ihre Flächen Perpendikel fällt (sc auf SAB, sa auf SBC, sb auf SAC), so entsteht eine neue dreikantige Ecke sabc, deren Kantenwinkel beziehungsweise die Supplemente der Flächenwinkel der erstern Ecke sind; und umgekehrt, die Kantenwinkel der erstern sind bezüglich Supplemente der Flächenwinkel der zweiten. Da die Ebenen SAB und SAC auf der Ebene bsc senkrecht stehen, so ist die Durchschnittslinie SA der erstern auf der letztern Ebene senkrecht, mithin auch auf den Linien Ab und Ac; also Winkel bAc das Maß des Neigungswinkels der Ebenen SAB und SAC.

Man hat daher Winkel bAc + bse = 2R;
ebenso Winkel aBc + ase = 2R;
und Winkel bCa + bsa = 2R.
Ferner ist Winkel BaC + CSB = 2R;
desgleichen AbC + ASC = 2R;
und AcB + ASB = 2R.

Aus diesen Gleichungen ergibt sich die Richtigkeit der Behauptung. — Weil sich die Kantenwinkel und Flächenwinkel der Ecken S und s gegenseitig ergänzen, so nennt man jede dieser Ecken S, s die Supplementarecke der andern.

Aus dem vorhergehenden Lehrsatze ergeben sich leicht folgende zwei Sätze:

I. In jeder dreikantigen Ecke ist die Summe der Flächenwinkel immer größer als zwei rechte und kleiner als sechs rechte Winkel. Denn sind A, B, C die drei Flächenwinkel einer dreikantigen Ecke, und a, b, c die Kantenwinkel der Supplementarecke, so hat man $A + a = 2R$, $B + b = 2R$, $C + c = 2R$. Hieraus folgt, wenn man diese drei Gleichungen addirt, $A + B + C + a + b + c = 6R$. Da $a + b + c$ beständig zwischen Null und vier Rechten liegt, so ist $A + B + C$ kleiner als sechs und größer als zwei Rechte, was bewiesen werden sollte.

II. Zwei dreikantige Ecken sind gleich, wenn ihre Flächenwinkel in der nämlichen Ordnung je zwei und zwei einander gleich sind. Denn alsdann sind die Kantenwinkel der beiden respectiv dazu gehörigen Supplementarecken paarweise einander gleich, mithin sind es auch je zwei und zwei die Flächenwinkel dieser Ecken. Hieraus folgt die Gleichheit der Kantenwinkel, je zwei und zwei, der beiden vorliegenden dreikantigen Ecken.

Note 16 zu §. 130.

In jedem Parallelepiped ABCDabcd (Fig. 156) ist die Summe der vier Diagonalen der Summe der Quadrate der zwölf Kanten gleich. Das Parallelogramm dbBD gibt $Db^2 + Bd^2 = 2Dd^2 + 2DB^2$ (§. 88); ebenso gibt das Parallelogramm ACca, $Ac^2 + aC^2 = 2Aa^2 + 2AC^2$.

Hieraus erhält man durch Addition:

$$Db^2 + dB^2 + Ac^2 + aC^2 = 2Dd^2 + 2Aa^2 + 2DB^2 + 2AC^2;$$

oder $Db^2 + dB^2 + Ac^2 + aC^2 = 4(Aa^2 + AD^2 + AB^2)$,

weil $AC^2 + DB^2 = 2AD^2 + 2AB^2$.

Es ist dieser für das Parallelepiped bewiesene Satz dem für das Parallelogramm gegebenen analog.

Note 17 zu §. 133.

Wenn drei Seitenflächen einer dreiseitigen Pyramide auf einander senkrecht stehen, so ist das Quadrat der Seitenfläche, welche der von jenen drei senkrechten Seitenflächen gebildeten Ecke gegenüber liegt, gleich der Summe der Quadrate der dieselbe einschließenden Seitenflächen. Es seien die Ebenen BAC, CAD, BAD (Fig. 202) auf einander senkrecht, also die Winkel BAC, BAD und CAD rechte. Setzen wir Dreieck BAC=a, Dr. BAD = b, Dr. DAC = c und Dr. BCD = d, und fällen AE senkrecht auf BC, wonach ED auch senkrecht auf BC (§. 111) ist; so erhalten wir $a = BC \times \frac{AE}{2}$, $b = AB \times \frac{AD}{2}$,

$$c = AC \times \frac{AD}{2},\ d = BC \times \frac{ED}{2}.$$

Folglich $a^2 + b^2 + c^2 = (AB^2 + AC^2)\ \frac{AD^2}{4} + BC^2 \times \frac{AE^2}{4}$; oder

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{BC^2}{4}(AD^2 + AE^2) = \frac{BC^2}{4} \times ED^2.$$

Nun ist aber $\frac{BC^2}{4} \times ED^2 = d^2$; also $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$, was zu beweisen war.

Dieser stereometrische Satz ist dem pythagoräischen Lehrsatz in der Planimetrie ganz analog.

Note 18 zu §. 159.

Der von einer Zone und ihren parallelen Kreisebenen begrenzte körperliche Raum S hat zum Maß $\frac{1}{6}\pi h(3a^2 + 3b^2 + h^2)$; h stellt die Höhe der Zone, a und b die Halbmesser der Kreisflächen dar. Bezeichnet man durch x die Höhe des fehlenden Kugelabschnittes, so ist

$$S = [3a^2 + (h+x)^2]\ \frac{\pi(h+x)}{6} - \frac{\pi x}{6}(x^2 + 3b^2)\ (\S.\ 159),$$

oder $S = \frac{\pi}{6}[3a^2h + h^3 + 3(hx^2 + a^2x + h^2x - b^2x)]$.

Setzt man den Halbmesser der Kugel = r, so hat man $b^2 = x(2r - x)$ und $a^2 = (x + h)(2r - x - h)$.

Wird anstatt $2r - x$ der aus der ersten dieser Gleichungen dafür erhaltene Werth in die zweite substituirt, so kommt $hx^2 + a^2x + h^2x - b^2x = hb^2$.

Hiernach findet man $S = \frac{\pi h}{6}(3a^2 + 3b^2 + h^2)$, was zu beweisen war.

Leicht läßt sich auch die krumme Oberfläche der Zone durch a, b und h ausdrücken. Wird diese Oberfläche mit Z bezeichnet, so hat man die Gleichung $Z = 2\pi rh$. Setzt man die Entfernung der größern Kreisebene vom Mittelpunkt der Kugel $= y$, so ist $(y + h)^2 + b^2 + h^2 = a^2 + y^2$; woraus $y = \frac{a^2 - b^2 - h^2}{2h}$. Nun ist $r^2 = a^2 + y^2$; folglich $r^2 = a^2 + \left(\frac{a^2 - b^2 - h^2}{2h}\right)^2$. Hieraus findet man

$$Z = 2\pi\sqrt{[(a^2 + h^2)^2 - b^2 (2a^2 - 2h^2 - b^2)]}$$

Inhalt des dritten Buches.

(Elementar-Geometrie.)

Erstes Kapitel.

Von den Linien.

	Seite
Von den geraden Linien, Winkeln und Dreiecken	4
Vom Kreise und dem Messen der Bogen und Winkel	16
Von den senkrechten, schiefen und parallelen Linien	22
Von den Senkrechten und Parallelen im Kreise und vom Verhalten der Kreise zu einander	30
Von den Dreiecken und den Winkeln im Kreise	36
Von der Proportionalität der Linien und den ähnlichen Dreiecken . .	48
Von den Vierecken und den Vielecken überhaupt	64
Von den ähnlichen Vielecken und der Kreislinie	73

Zweites Kapitel.

Von den Flächenräumen.

Von dem Flächeninhalte der Vielecke und des Kreises	81
Vergleichung der Flächenräume	90

Drittes Kapitel.

Von den Figuren im Raume.

Von den geraden Linien und Ebenen	95
Von den körperlichen Winkeln	107
Von der Oberfläche der Körper	110
Von der Gleichheit, Aehnlichkeit und Symmetrie der Körper . . .	120

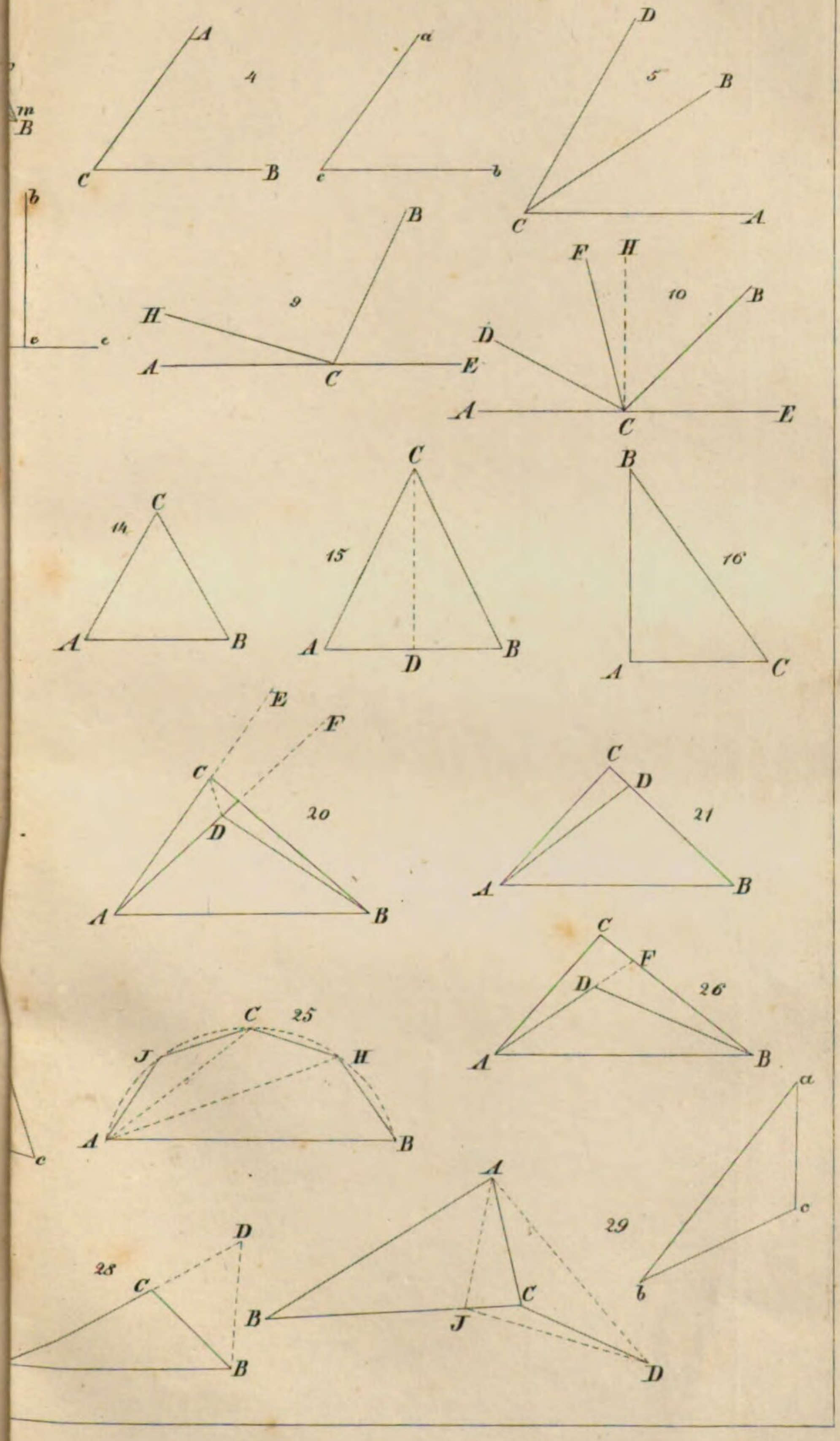
Inhalt des dritten Buches.

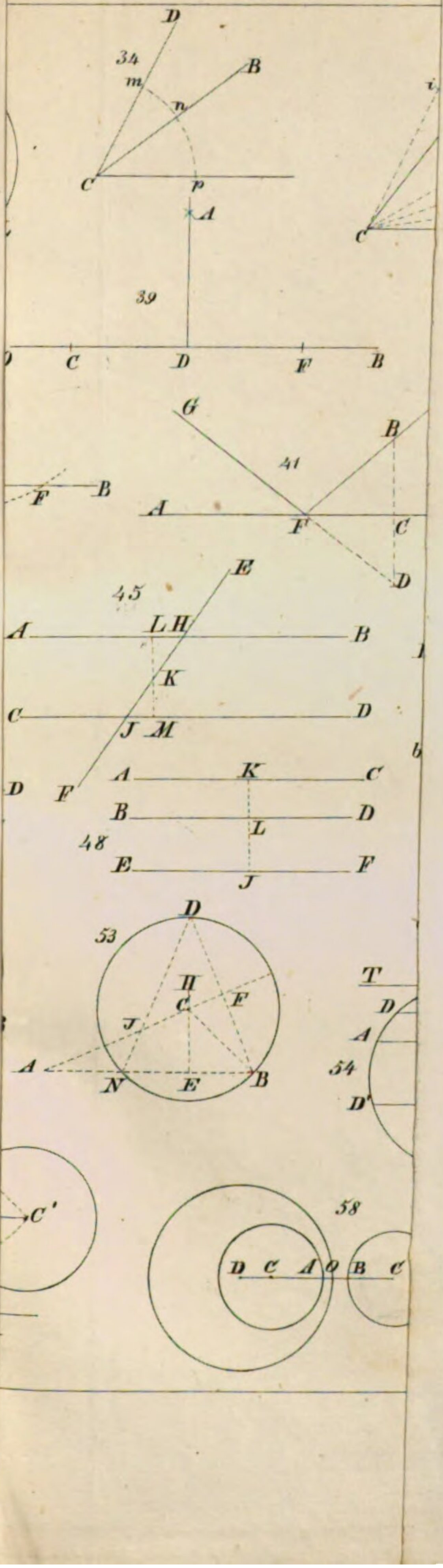
Seite.

Viertes Kapitel.

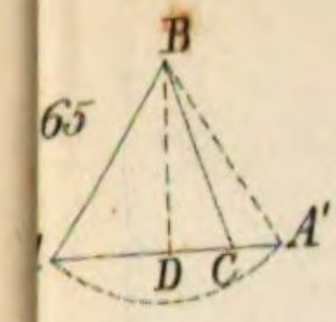
Von dem Volumen.

Von dem Maße des Volumens der Körper 126
Vergleichung der Volumen 137
Noten 139

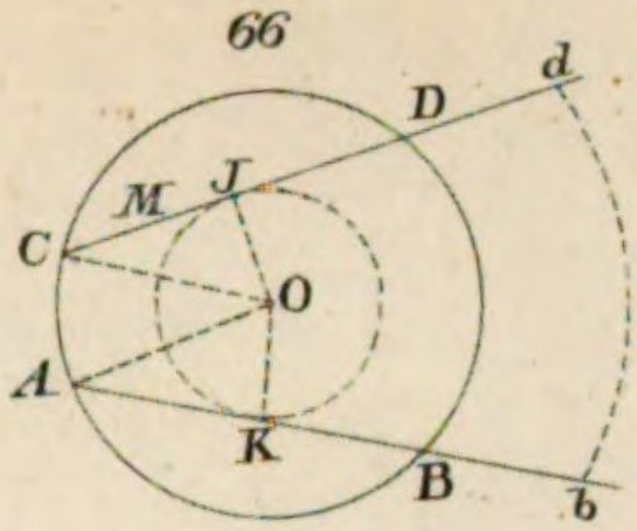

A
B
C
4
a
b
c
D
5
m
B
b
B
H
9
e
c
A
C
E
10
F
H
D
B
A
C
E
C
14
A
B
C
15
A
D
B
B
16
A
C
E
F
C
D
20
A
B
C
21
A
B
C
D
F
26
A
B
J
C
H
25
A
B
c
D
28
C
B
A
J
C
D
a
29
b
c


D
34
m
B
n
C
p
A
39
C
D
F
B
G
B
41
F
B
A
F
C
D
E
45
A
L H
B
K
C
D
J M
D
F
A
K
C
B
D
L
48
E
F
J
D
53
H
C
F
J
A
N
E
B
T
D
A
54
D'
C'
58
D C A O B C

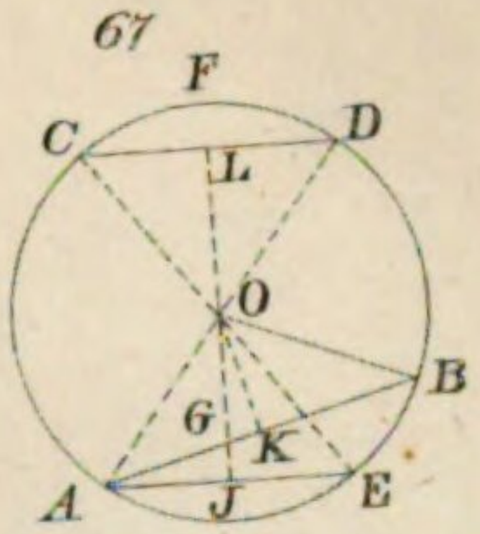
65



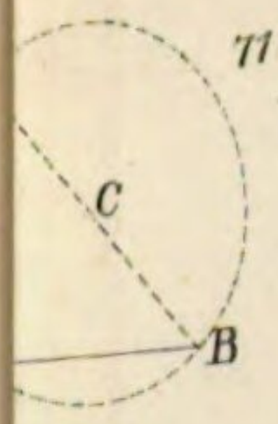
66



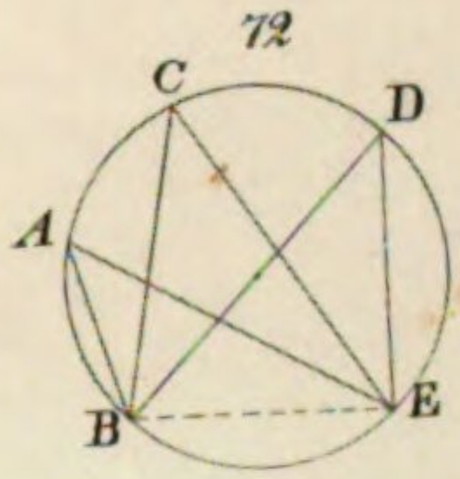
67



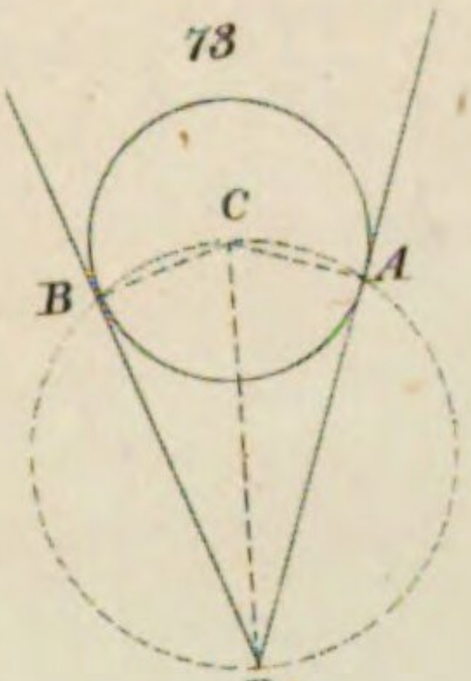
71



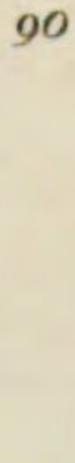
72



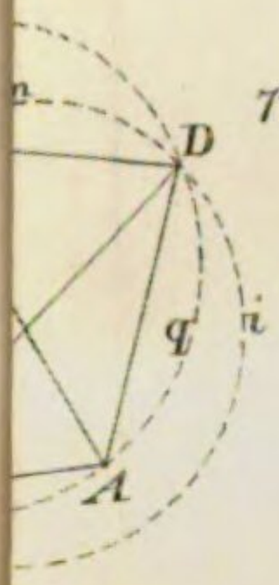
73



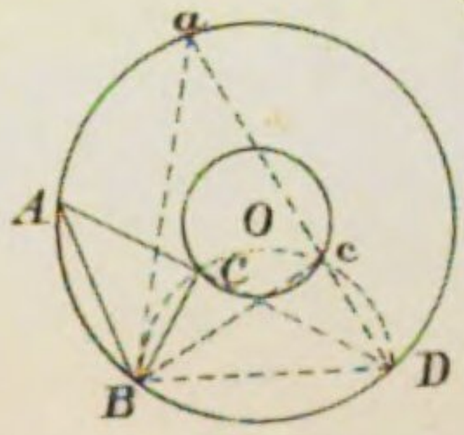
90

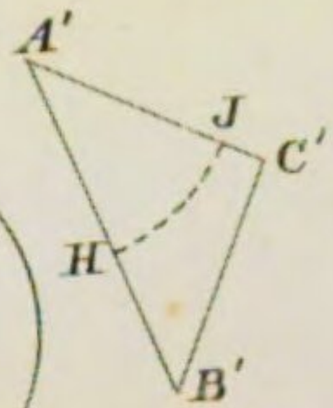


77

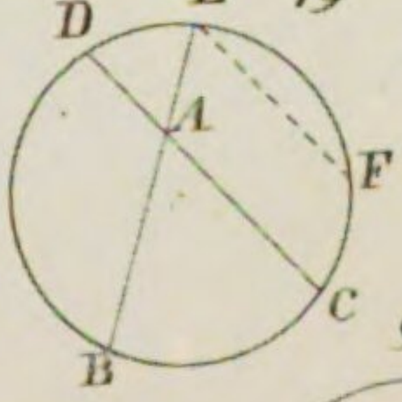


78

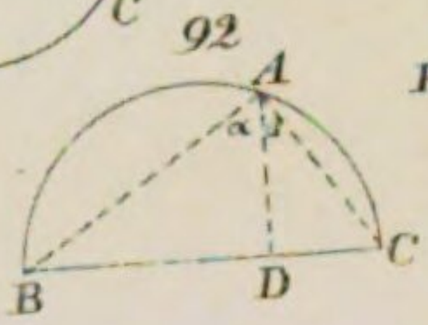




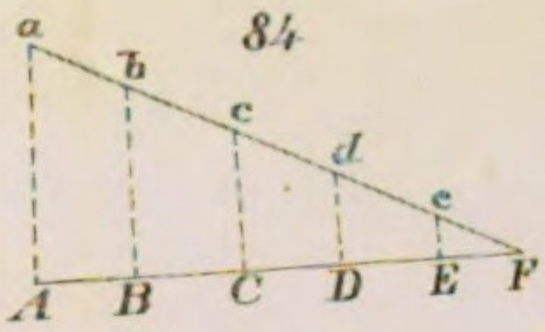
79



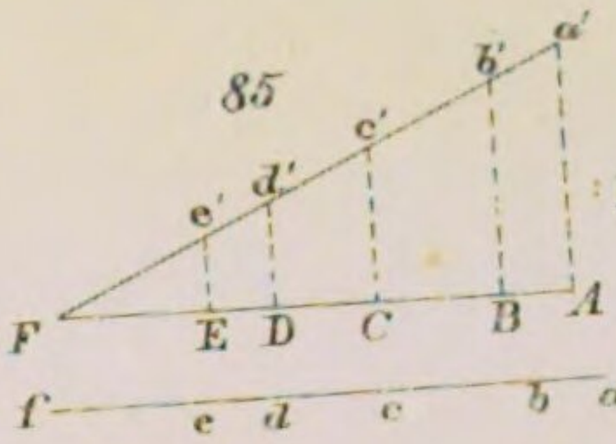
92



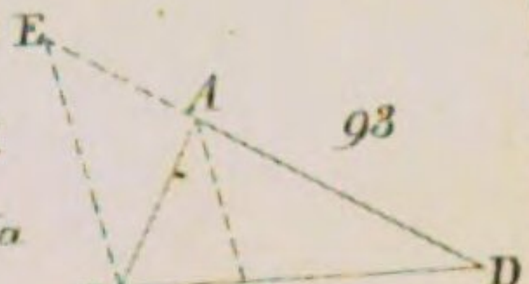
84

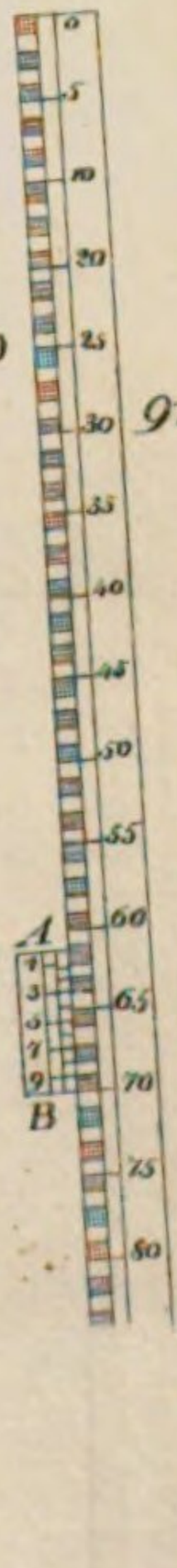


85



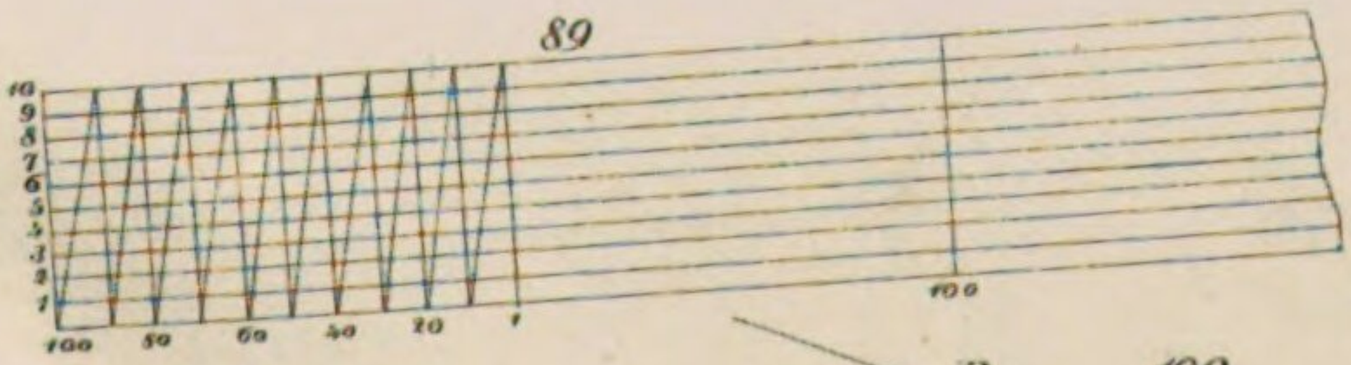
93



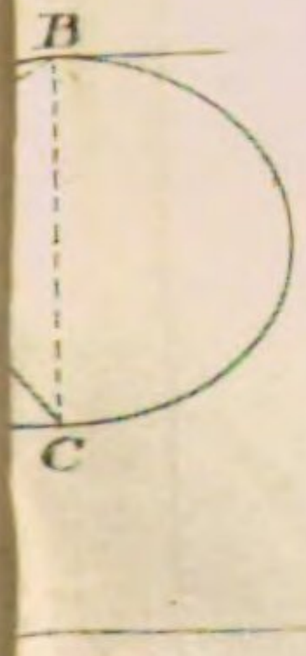


L

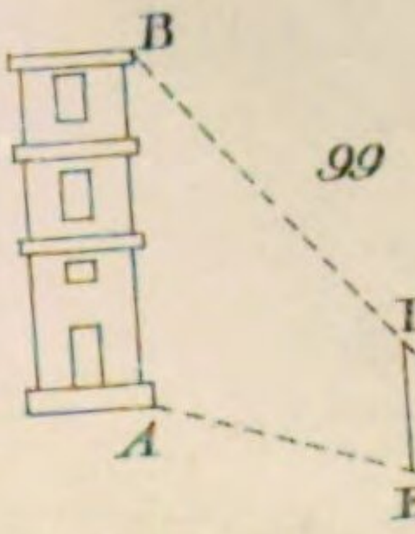
89



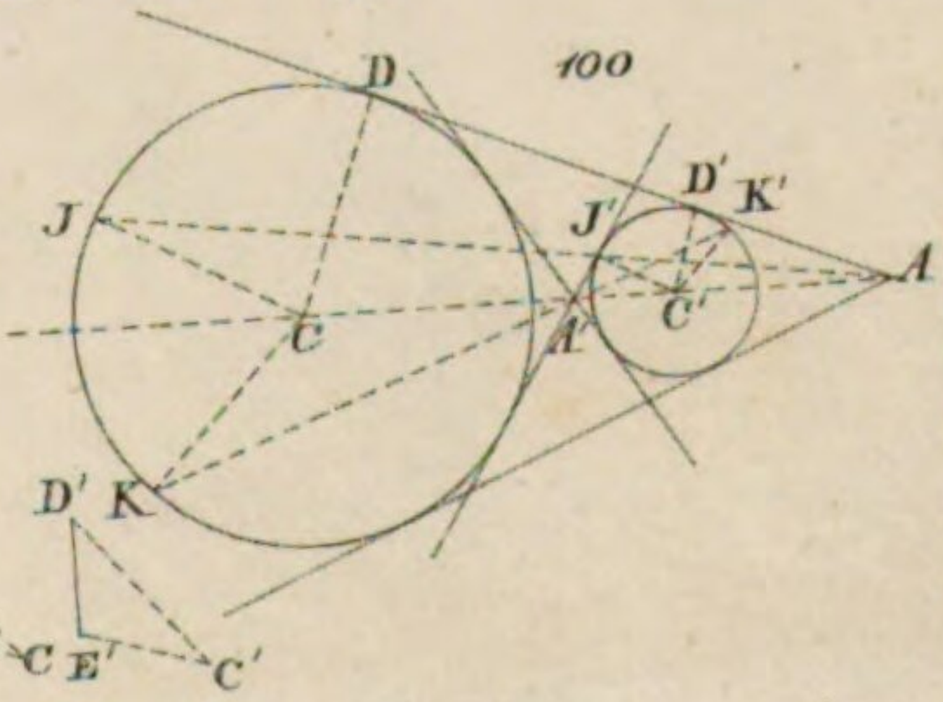
98



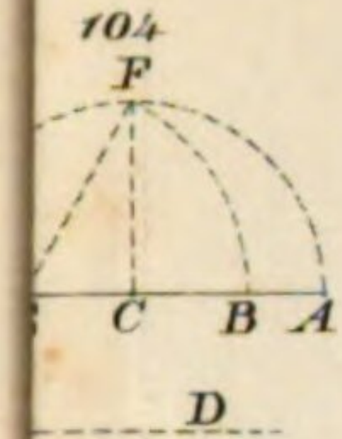
99



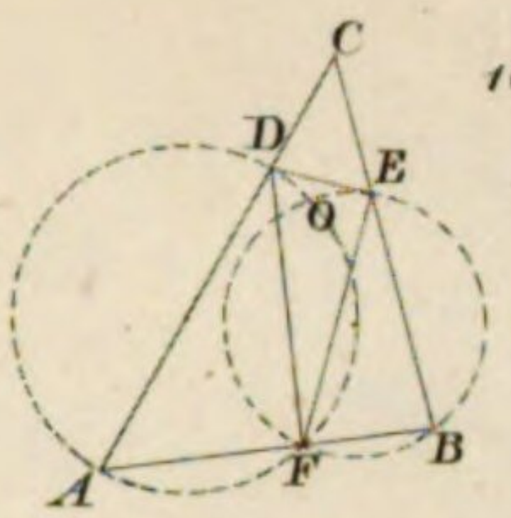
100

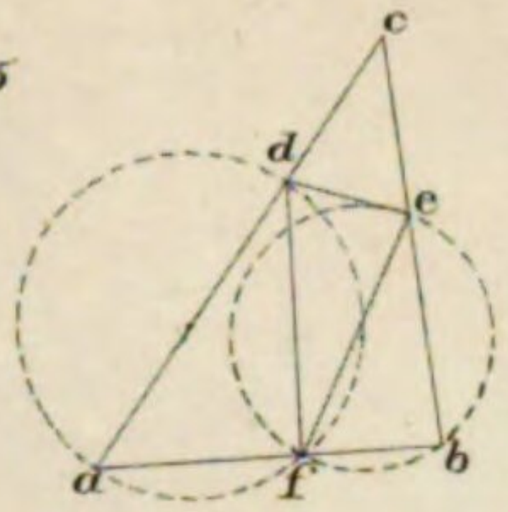


104

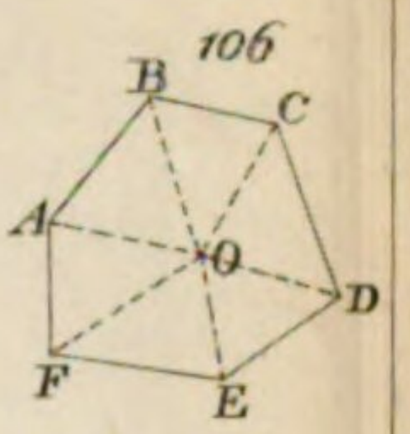


105

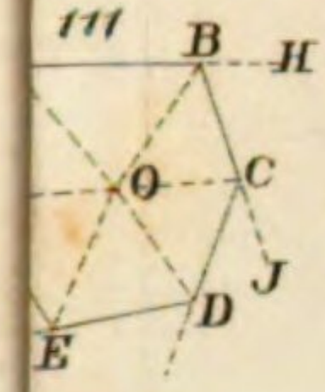




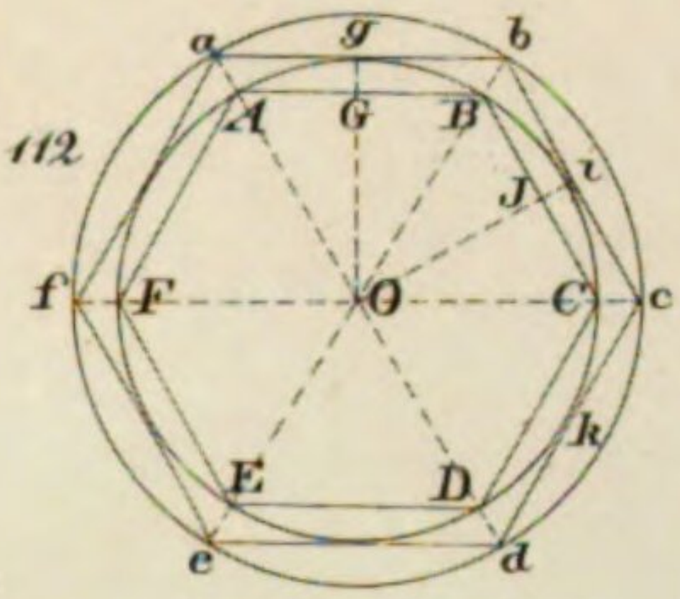
106



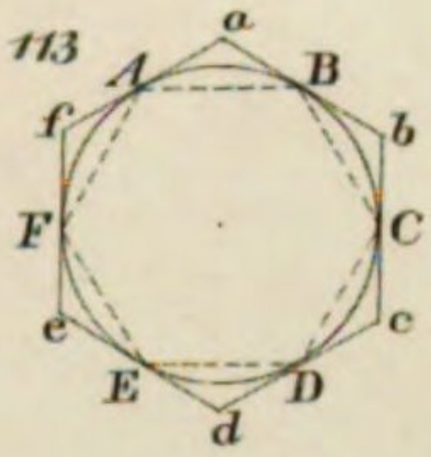
111



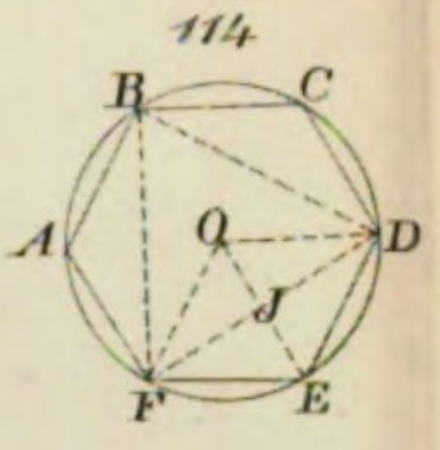
112

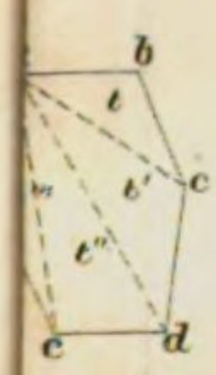


113

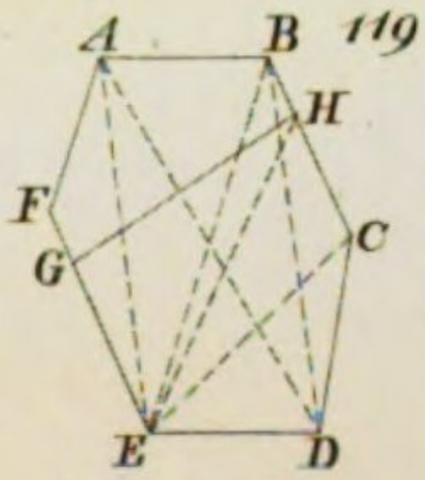


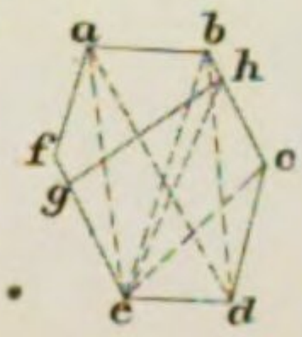
114



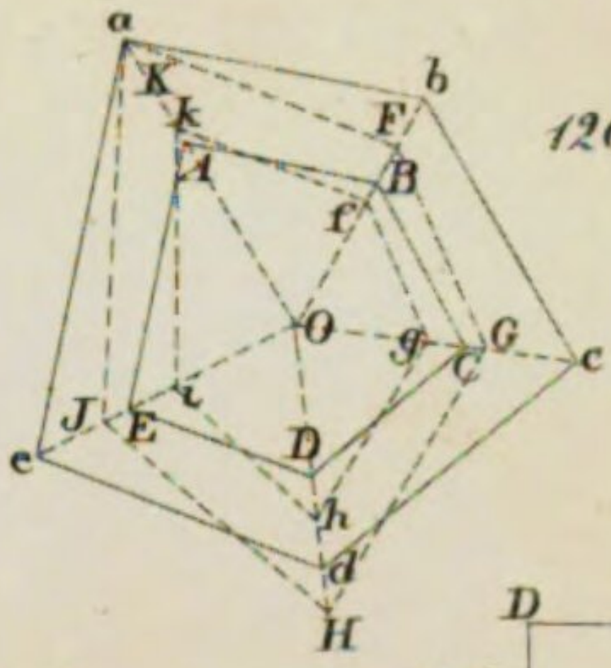


119

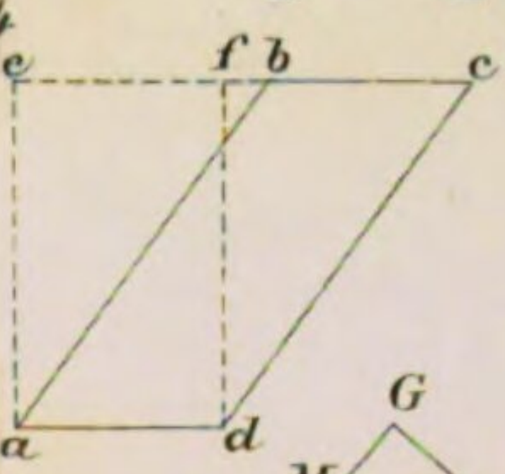




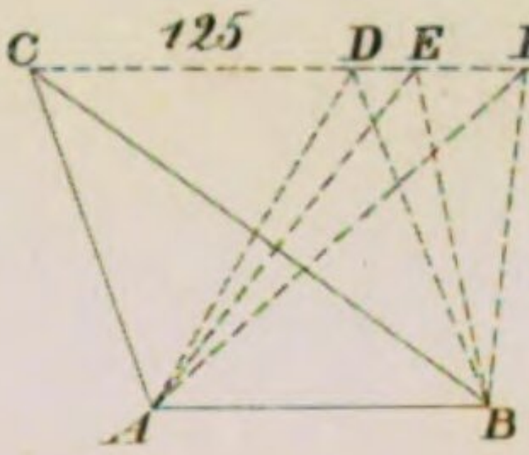
120



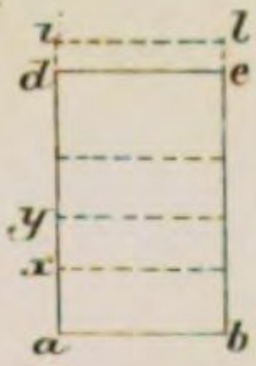
124

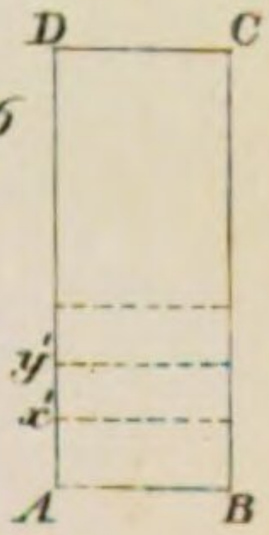


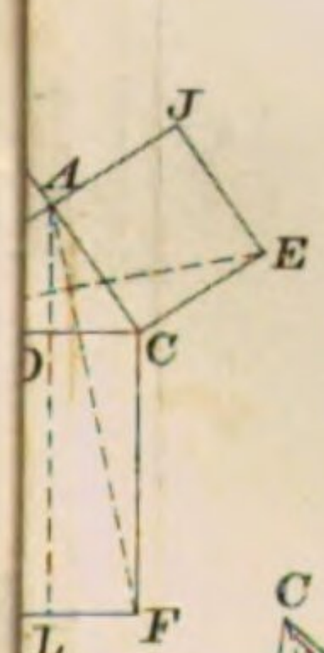
125



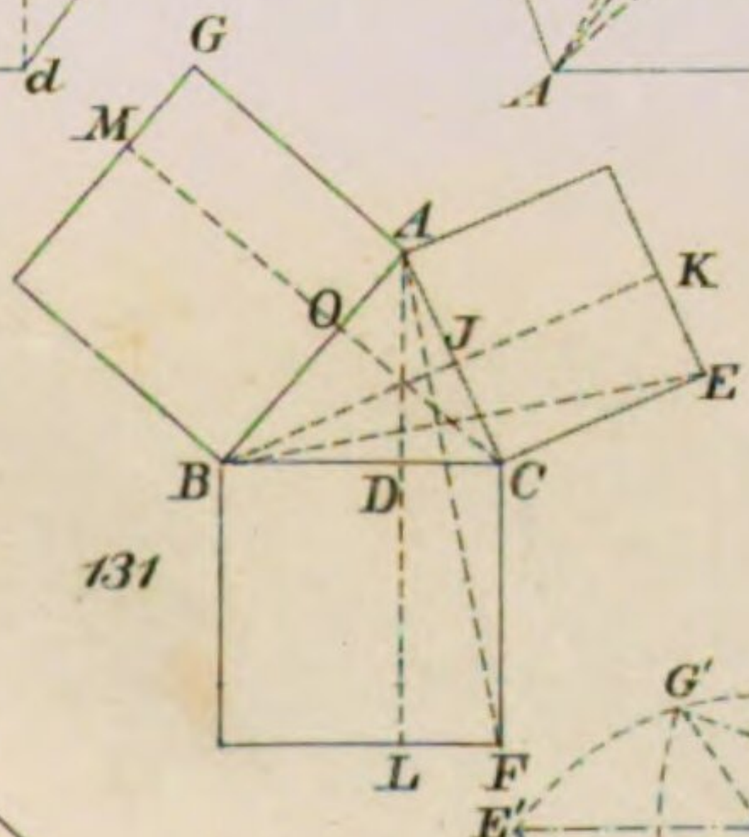
126



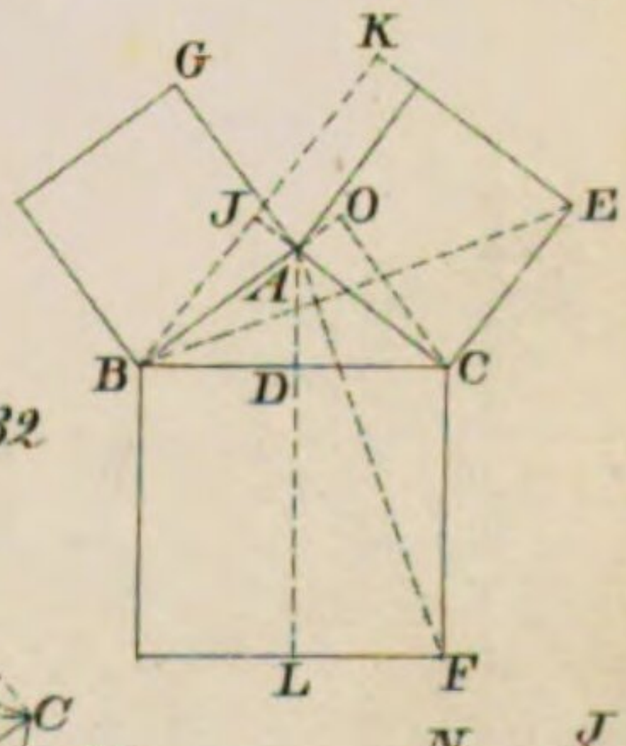


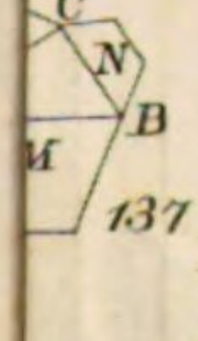


131



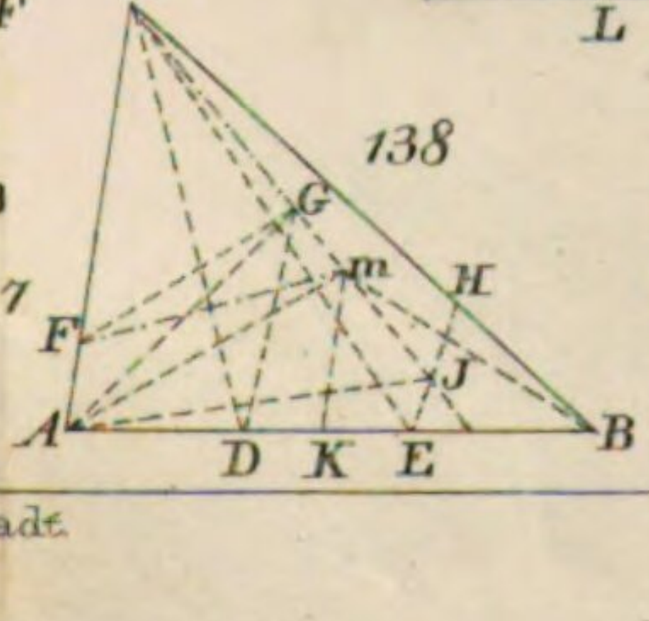
132

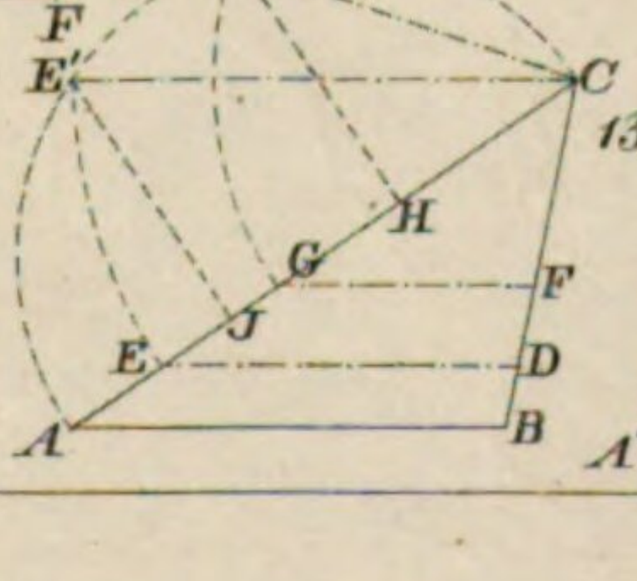




137

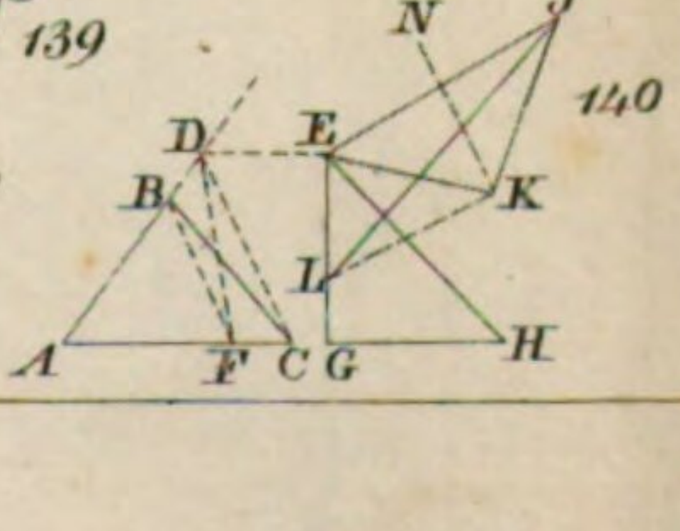
138



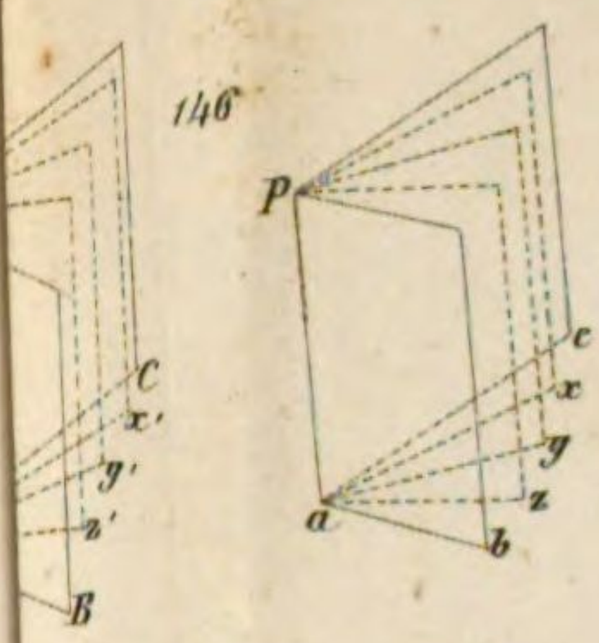


139

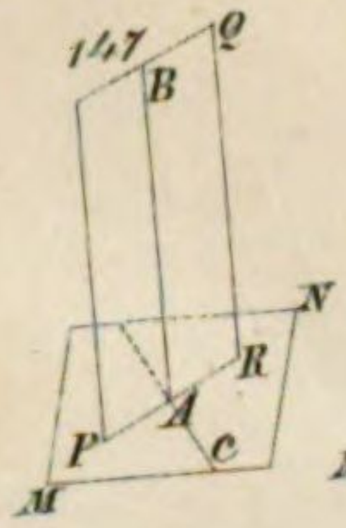
140



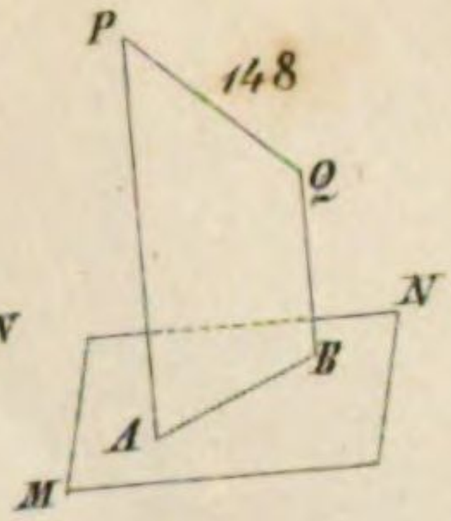
146



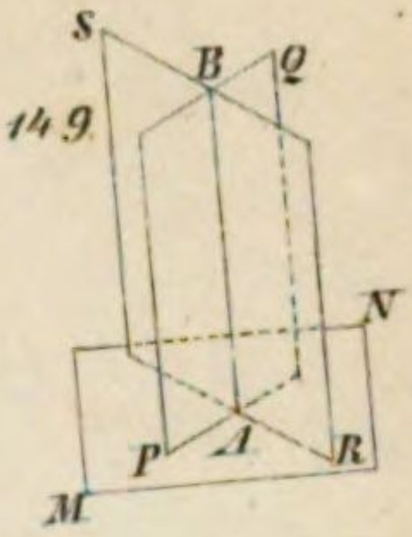
147



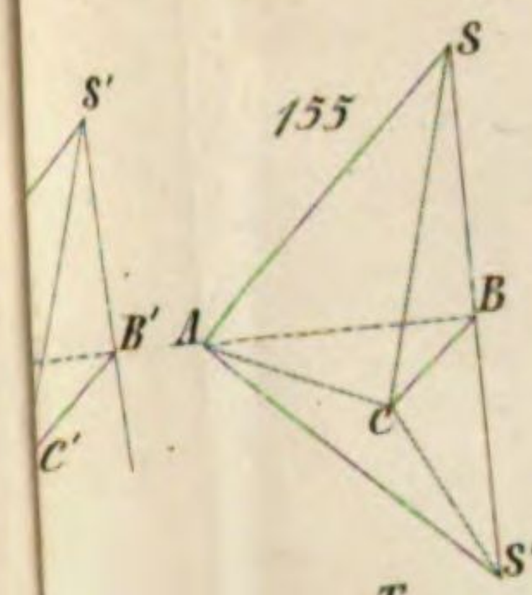
148



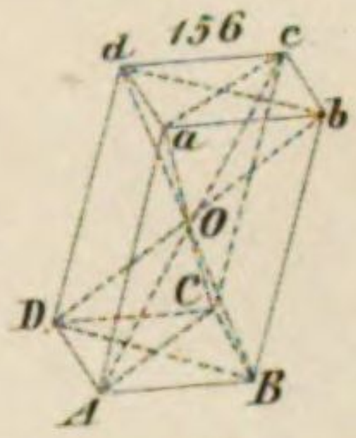
149



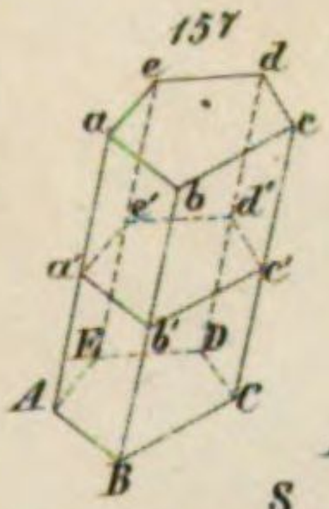
155



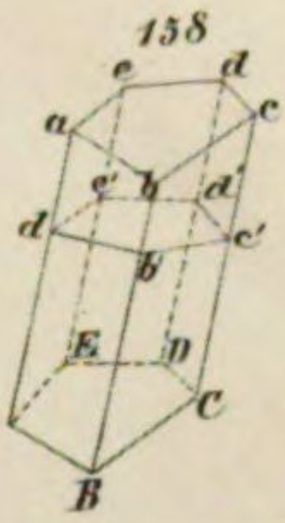
156



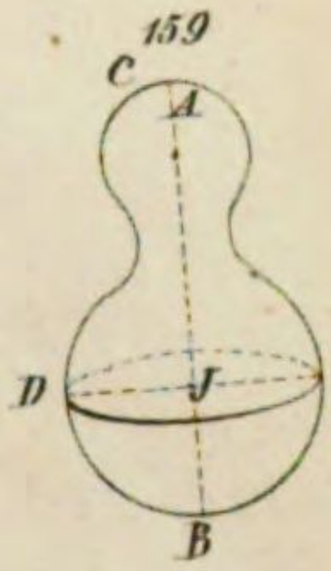
157



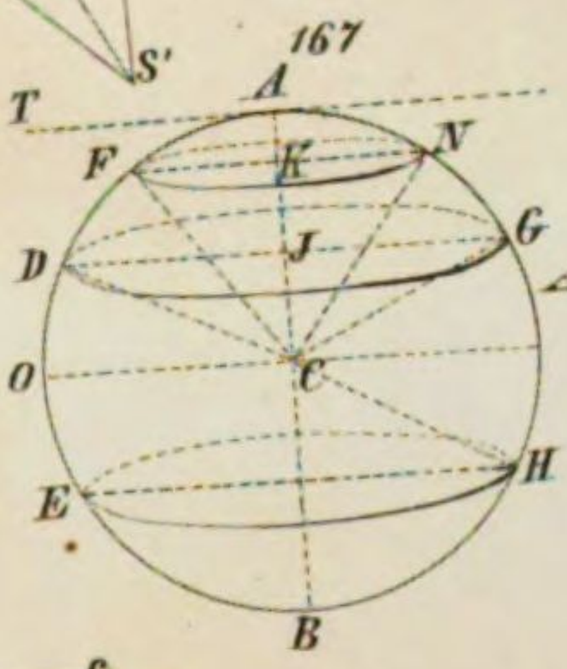
158



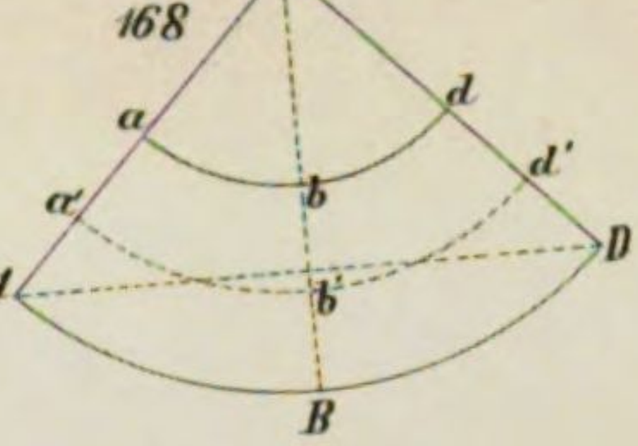
159



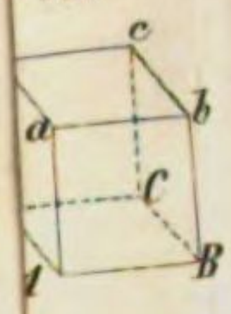
167



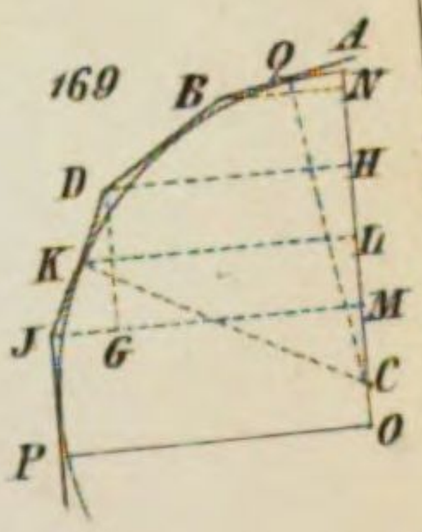
168



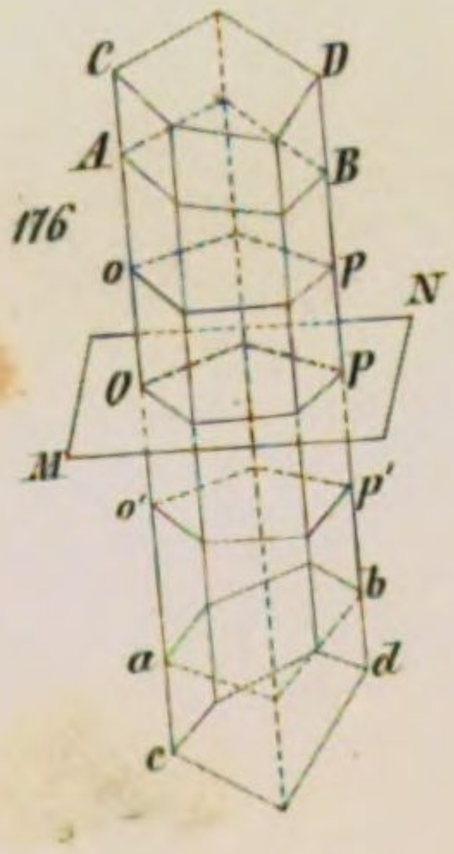
166



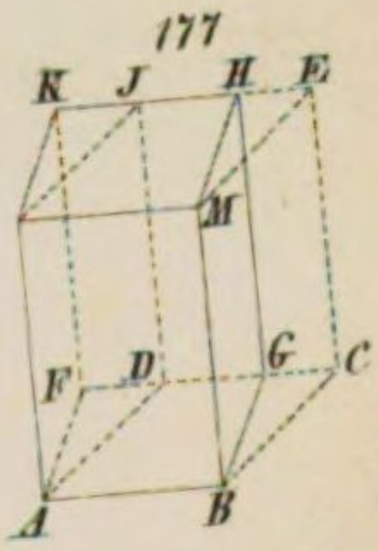
169



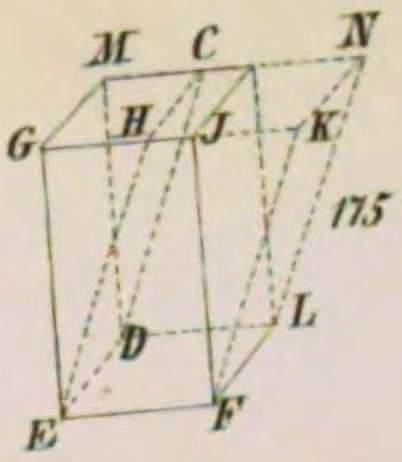
176



177

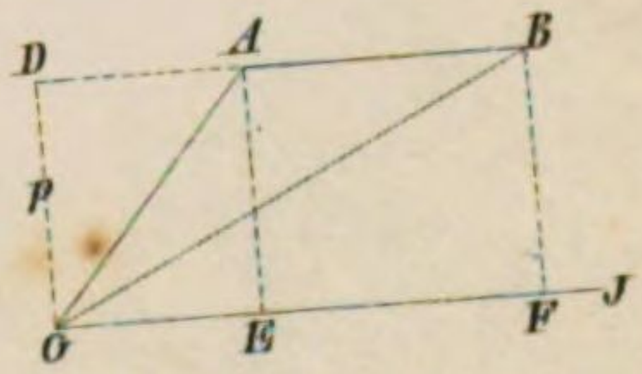


175

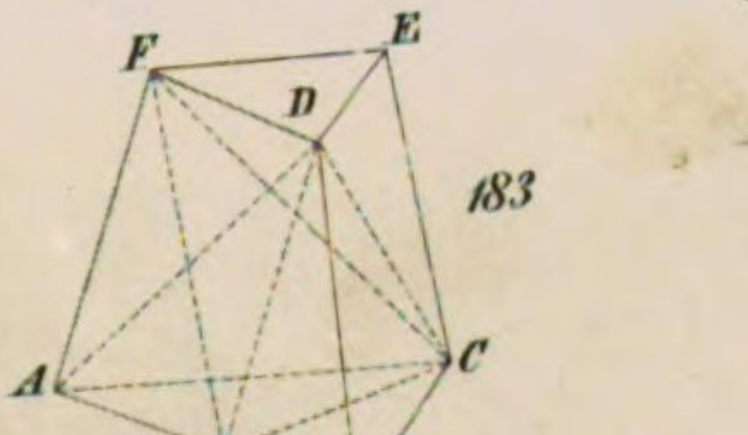


183

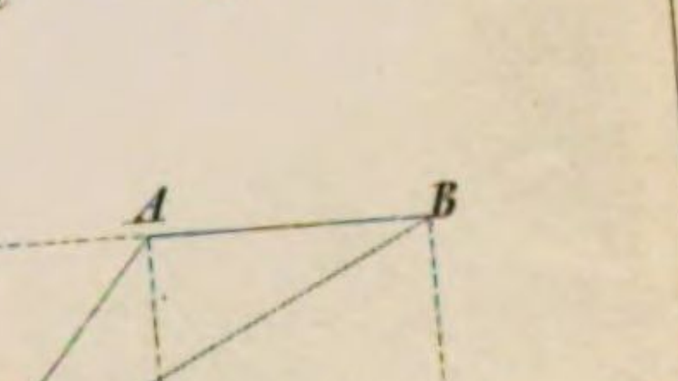
185



184

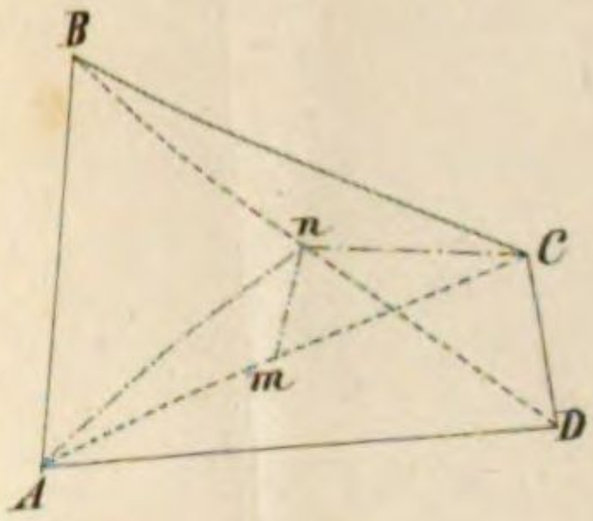


186

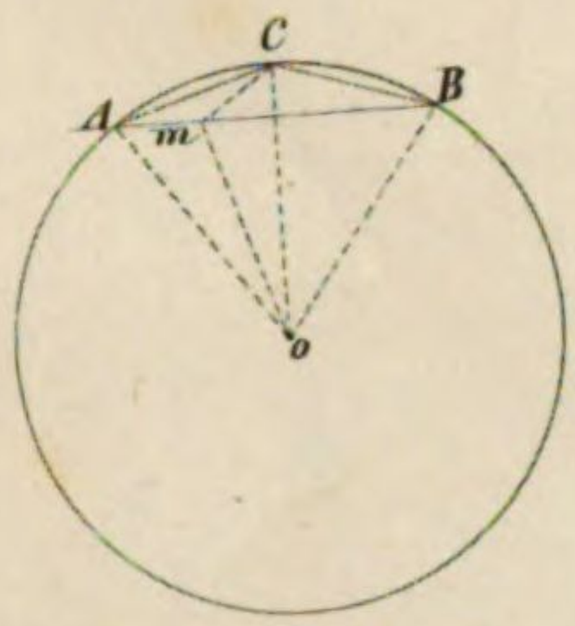


E. Dustadt.

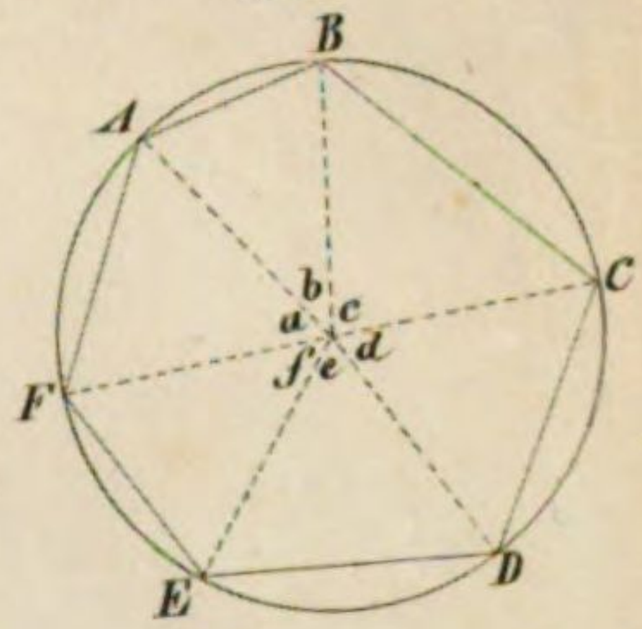
190



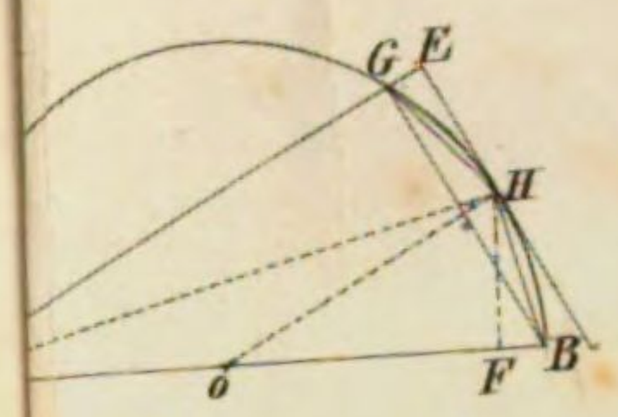
191



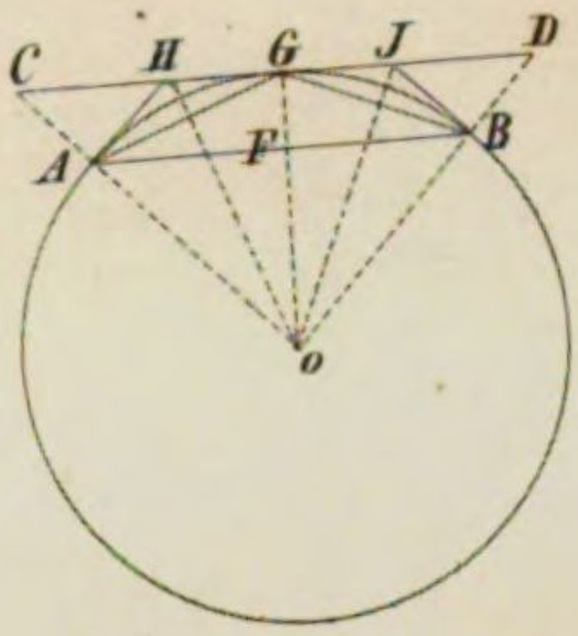
192



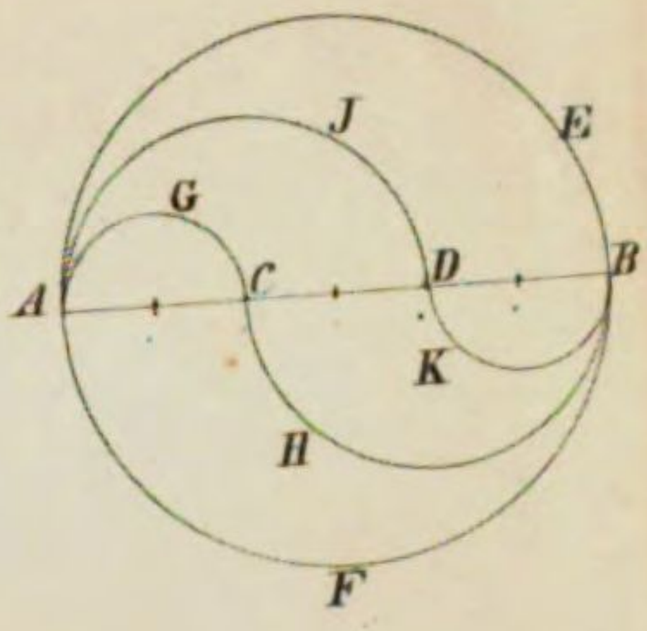
195



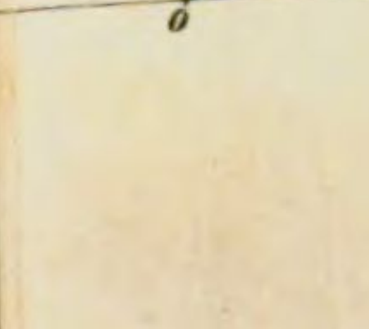
196



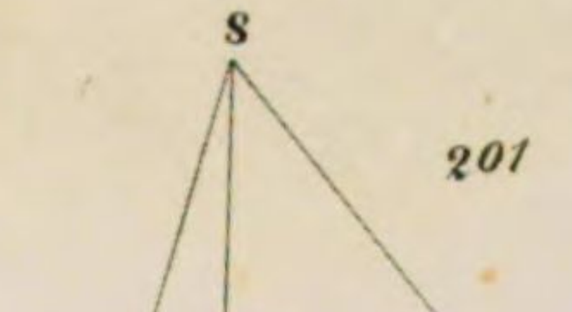
197



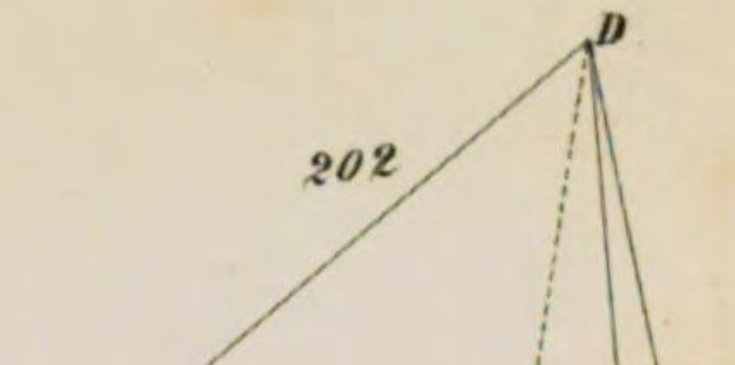
200



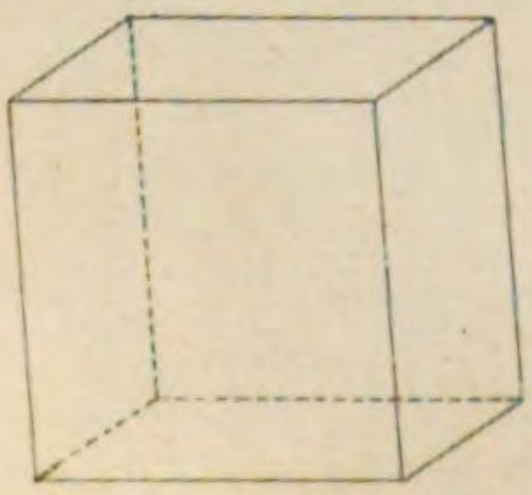
201



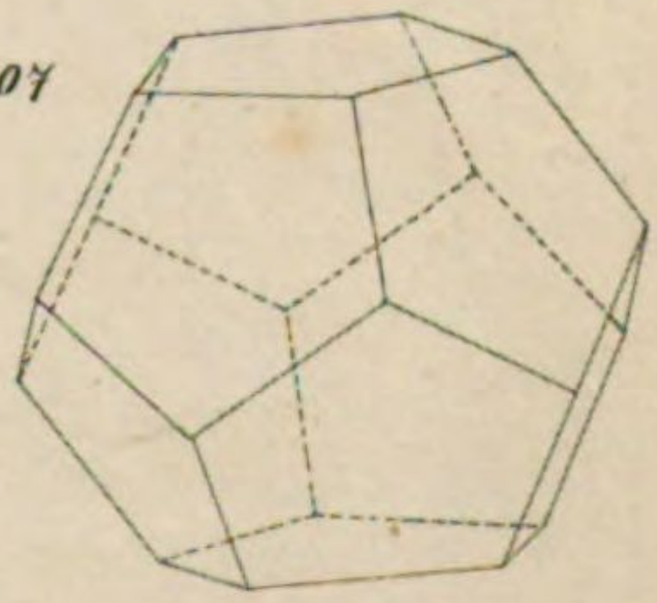
202



206



207



in Darmstadt.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Francoeur, Louis Benjamin,

Vollständiger Lehrkurs der reinen Mathematik

Bd.: 1,3

Bern [u.a.] 1839
Regensburg, Staatliche Bibliothek -- 999/Philos.2887(1,1/4
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11111650-6